

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
Wydział Fizyki i Astronomii
Instytut Fizyki Teoretycznej

Łamanie symetrii CP w oddziaływaniach neutrin

Jarosław Nowak

PRACA MAGISTERSKA
wykonana pod kierunkiem
dra hab. Jana Sobczyka

Składam serdeczne podziękowania profesorowi Janowi Sobczykowi za opiekę merytoryczną i wiele cennych uwag w trakcie dyskusji na temat rozpatrywanych zagadnień oraz okazaną mi pomoc i poświęcony czas

Spis treści

1	Wstęp	5
2	Neutrina w Modelu Standardowym	5
3	Symetrie dyskretne C, P, T	9
3.1	Inwersja przestrzenna i odwrócenie czasu	10
3.2	Sprzężenie ładunkowe	11
3.3	Operatory kreacji i anihilacji	11
4	Przegląd doświadczeń neutrinowych	12
4.1	Doświadczenia z neutronami słonecznymi	12
4.1.1	Doświadczenie chlorowe: Homestake	13
4.1.2	Doświadczenia galowe: GALLEX i SAGE	14
4.1.3	Doświadczenia Czerenkowskie: Kamiokande i Super-Kamiokande	14
4.1.4	Najnowsze dane: Sudbury Neutrino Observatory	15
4.1.5	Podsumowanie doświadczeń słonecznych	16
4.2	Eksperymenty neutron atmosferycznych	16
4.3	Eksperyment LSND	18
5	Prawdopodobieństwo oscylacji	19
5.1	Prawdopodobieństwo oscylacji dla układu dwóch neutron	20
5.2	Prawdopodobieństwo oscylacji dla układu trzech neutron	22
5.3	Wybór parametrów	24
6	Oddziaływanie neutron z materią	27
6.1	Oscylacje neutron i łamanie symetrii CP	29
6.2	Sposoby wyznaczania fazy CP	34
7	Wnioski	40
A	Prawdopodobieństwo oscylacji dla 3 rodzin	42
B	Argument funkcji	48

C	Efektywny Hamiltonian	49
D	Wyznaczenie ogólnej postaci macierzy unitarnych	50
D.1	Przypadek 2x2	50
D.2	Własności macierzy unitarnych	53

Streszczenie

W pracy zostanie przedstawiony opis łamania symetrii CP oraz T w przypadku oscylacji neutrin w próżni i w materii. Zostanie przedstawiony optymalny sposób ustawienia doświadczenia mierzącego ten efekt.

1 Wstęp

Fizyka neutrin jest aktualnie niezwykle aktywną częścią fizyki cząstek elementarnych, zarówno doświadczalnej jak i teoretycznej. Prowadzone są doświadczeń, których wyniki potwierdzają hipotezę oscylacji neutrin [1]. W pracy będę zakładał, że oscylacje zachodzą jedynie między trzema znanymi neutrinami, a wynik z LSND zostanie zaniedbany. Jednocześnie wydaje się rozsądne założenie, że planowane eksperymenty, zwłaszcza z udziałem fabryk neutrin będą mogły wykryć zjawisko łamania symetrii CP i T [2][3] w sektorze leptonowym. Dotychczas efekt łamania symetrii CP odkryto jedynie w układzie neutralnych kaonów. Jednak prowadzone są też doświadczenia, które mają wyjaśnić czy w mezonach z kwarkiem b symetria CP jest łamana.

2 Neutrino w Modelu Standardowym

W Modelu Standardowym neutrino należą do klasy leptonów, cząstek które nie podlegają oddziaływaniom silnym. Eksperymentalnie wyznaczono, że neutrino są cząstkami neutralnymi elektrycznie o spinie 1/2. W Modelu Standardowym neutrino są cząstkami bezmasowymi. Z badań szerokości rozpadu bozonu Z^0 przeprowadzonych na akceleratorze LEP wynika, że istnieją trzy rodzaje neutrin. Leptony oddziałują poprzez wymianę bozonów W^\pm i Z^0 . Oddziaływanie przez bozony W^\pm nazywamy oddziaływaniem przez prąd naładowany, a oddziaływanie przez Z^0 oddziaływaniem przez prąd neutralny. Przy niskich energiach słabe procesy są dobrze opisywane czterofermionowym lagranżjanem efektywnym składający się z dwóch części :

$$\mathcal{L}^W(x) = \mathcal{L}^{CC}(x) + \mathcal{L}^{NC}(x) \quad (2.1)$$

Gdzie $\mathcal{L}^{CC}(x)$ jest lagranżjanem oddziaływania prądów naładowanych, a $\mathcal{L}^{NC}(x)$ prądów neutralnych:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{CC}(x) &= \frac{G}{\sqrt{2}} J^{\mu+}(x) J_{\mu}(x), \\ \mathcal{L}^{NC}(x) &= \frac{G}{\sqrt{2}} K^{\mu}(x) K_{\mu}(x).\end{aligned}$$

$J_{\mu}(x)$ – prąd naładowany (zmniejsza ładunek o jeden), $J^{\mu+}(x)$ – prąd sprzężony hermitowsko (zwiększa ładunek o jeden), $K^{\mu}(x)$ – prąd neutralny (jest diagonalny tzn. przeprowadza cząstki w siebie same). Jeśli weźmiemy pod uwagę procesy, w których udział biorą tylko leptony to dokładna postać prądu naładowanego i neutralnego jest następująca:

$$J_{\mu} \equiv \bar{\psi}_e \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_{\mu} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_{\mu}} + \bar{\psi}_{\tau} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_{\tau}} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}K_{\mu} &\equiv \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_{\nu_{\mu}} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_{\mu}} + \bar{\psi}_{\nu_{\tau}} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_{\tau}}) + \\ &+ (\xi - \frac{1}{2}) (\bar{\psi}_e \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_e + \bar{\psi}_{\mu} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\mu} + \bar{\psi}_{\tau} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\tau}) + \\ &+ \xi (\bar{\psi}_e \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_e + \bar{\psi}_{\mu} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_{\mu} + \bar{\psi}_{\tau} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) \psi_{\tau}),\end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie

$$\xi = \sin^2 \theta_W \approx 0.24,$$

a θ_W jest tak zwanym kątem Weinberga. ψ_i i ψ_{ν_i} ($i = e, \mu, \tau$) są odpowiednio polami leptonów naładowany i neutrin. Należy jeszcze zauważyć, że w lagranżjan słabych oddziaływań jest skonstruowany w taki sposób, aby w oddziaływaniach brały udział tylko neutrina lewoskrętne i prawoskrętne antyneutrina. Każdy wyraz w lagranżjanie prądu naładowanego jest postaci

$$\bar{f} O_{\mu}^L i, \quad (2.4)$$

gdzie i i f są odpowiednio polami cząstki początkowej i końcowej, a $\bar{f} = f^{\dagger} \gamma_0$. Korzystając z faktu antykomutowania macierzy γ_5 i γ_{α} mamy

$$O_{\mu}^L = \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5). \quad (2.5)$$

Biorąc to pod uwagę możemy zapisać

$$\bar{f} O_{\mu}^L i = 2 \bar{f}_L \gamma_{\mu} i_L, \quad (2.6)$$

gdzie

$$i_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) i \quad \bar{f}_L = \bar{f} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5). \quad (2.7)$$

Tutaj indeks L wskazuje na to, że i_L i f_L przedstawiają tak zwane lewe komponenty bispinora Diraca. W bezmasowym opisie neutrin lewoskrętne pola $\nu_{aL} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\nu_a$ pojawiają się także w swobodnej części lagranżjanu. W przeciwieństwie do elektrodynamiki – gdzie masa fotonu znika ze względu na niezmienniczość na cechowanie, nie istnieje żadna symetria, która wymagałaby znikania masy neutrin. Możliwym rozszerzeniem modelu standardowego, które dopuszcza masowe neutrina jest wprowadzenie prawoskrętnych pól neutrin, a co za tym idzie członów masowych Diraca. Lagranżjan pola swobodnego ma wtedy postać:

$$\mathcal{L}_0 = \sum_i \bar{\psi}_{\nu_i} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i) \psi_{\nu_i}, \quad (2.8)$$

gdzie indeks m_i oznacza masy neutrin. W analogii do słabego oddziaływania w sektorze kwarkowym pola ψ_{ν_i} pojawiające się w swobodnym lagranżjanie (2.8) nie koniecznie są takie same jak pola w lagranżjanie oddziaływania (2.1), w których neutrina są produkowane wspólnie z leptonami naładowanymi. W szczególności te pola mogą być związane relacją:

$$\psi_{\nu_a} = \sum_i U_{ai} \psi_{\nu_i}, \quad (2.9)$$

gdzie U_{ai} są elementami macierzy unitarnej. W sektorze kwarkowym analogiczna macierz jest nazywana macierzą CKM (Cabbibo-Kobayashi-Maskawa). W sektorze leptonowym macierz U czasem jest nazywana macierzą MNS (Maki-Nakagawa-Sakata). Macierz łącząca stany słabego oddziaływania i stany własne swobodnego lagranżjanu w przypadku trzech rodzin neutrin jest macierzą unitarną 3×3 , którą w przypadku neutrin Diraca można sparametryzować przez trzy kąty mieszania i jedną fazę. Faza powoduje, że macierz CKM nie jest taka sama dla neutrin i antyneutrin. Ponieważ w lagranżjanie oddziaływania biorą udział tylko lewoskrętne neutrina i prawoskrętne antyneutrino, a łączy je transformacja dyskretna CP, to istnienie fazy w macierzy mieszania powoduje łamanie symetrii CP w sektorze leptonowym.

Równaniem ruchu dla lagranżjanu swobodnego (2.8) jest równanie Diraca:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.10)$$

Przypomnijmy, że $\gamma^\alpha = (\gamma^0, \vec{\gamma})$, $\gamma_\alpha = (\gamma_0, -\vec{\gamma})$, gdzie

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = i\gamma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Natomiast macierze σ_i są macierzami Pauliego:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ogólna postać swobodnych pól fermionowych

$$\psi_l(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_s (b(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} + d^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{ipx}) \quad (2.11)$$

Operatory b i d^\dagger są odpowiednio operatorami kreacji cząstki i anihilacji antycząstki, które spełniają relacje antykomutacji

$$\{b(\mathbf{p}, s), b^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (2.12)$$

$$\{d(\mathbf{p}, s), d^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (2.13)$$

$$\{b(\mathbf{p}, s), b(\mathbf{p}', s')\} = \{d(\mathbf{p}, s), d(\mathbf{p}', s')\} = 0 \quad (2.14)$$

Teraz można zdefiniować stan próżni

$$b(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0 \quad (2.15)$$

$$d(\mathbf{p}, s)|0\rangle = 0 \quad (2.16)$$

Wtedy stany jednocząstkowe są proporcjonalne do stanów:

$$b^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle \quad (2.17)$$

$$d^\dagger(\mathbf{p}, s)|0\rangle \quad (2.18)$$

Wszystkie wektory przestrzeni Hilberta mają postać:

$$b^\dagger(\mathbf{p}_1, s_1) \dots b^\dagger(\mathbf{p}_N, s_N) d^\dagger(\mathbf{p}_{N+1}, s_{N+1}) \dots |0\rangle \quad (2.19)$$

3 Symetrie dyskretne C, P, T

W mechanice kwantowej stany fizyczne są reprezentowane przez promienie w przestrzeni Hilberta. Promieniem nazywamy zbiór unormowanych wektorów o tej własności, że jeśli Ψ i Ψ' należą do tego samego promienia, to $\Psi' = \xi\Psi$, gdzie ξ jest dowolną liczbą zespoloną spełniającą $|\xi| = 1$. Dwaj obserwatorzy O i O' widzą, że układ jest odpowiednio w stanach reprezentowanym przez promienie \mathcal{R} i \mathcal{R}' . Obaj obserwatorzy powinni otrzymać jednakowe prawdopodobieństwa

$$P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n) \quad (3.20)$$

Twierdzenie Wingera, którego dowód można znaleźć m.in. w [4], mówi, że dla każdego przekształcenia promieni w przestrzeni Hilberta, które spełnia (3.20) można określić operator U , taki że jeśli Ψ należy do promienia \mathcal{R} , to $U\Psi$ należy do \mathcal{R}' , przy czym U jest albo operatorem *unitarnym* i *liniowym*

$$(U\phi, U\Psi) = (\phi, \Psi) \quad (3.21)$$

$$U(\xi\phi + \eta\Psi) = \xi U\phi + \eta U\Psi \quad (3.22)$$

albo *antyunitarnym* i *antyliniowym*

$$(U\phi, U\Psi) = (\phi, \Psi)^* \quad (3.23)$$

$$U(\xi\phi + \eta\Psi) = \xi^* U\phi + \eta^* U\Psi \quad (3.24)$$

Operator sprzężony do liniowego operatora jest zdefiniowany równością

$$(\Phi, L^\dagger\Psi) \equiv (L\Phi, \Psi) \quad (3.25)$$

Natomiast operator sprzężony do antyliniowego operatora A zdefiniujemy następująco

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi) \quad (3.26)$$

Przy definicjach (3.25) i (3.26) warunek unitarności i antyunitarności przyjmuje postać

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (3.27)$$

3.1 Inwersja przestrzenna i odwrócenie czasu

Wiadomo, że jednorodne przekształcenie Lorentza jest właściwe i ortoczasowe (tzn. $Det\Lambda = 1$, $\Lambda_0^0 \geq +1$) albo jest równe właściwemu przekształceniu mnożonemu przez \mathcal{T} , \mathcal{P} lub \mathcal{PT} , gdzie \mathcal{P} jest przekształceniem inwersji przestrzennej, a \mathcal{T} przekształceniem odwrócenia czasu

$$\mathcal{P}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{T}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z twierdzenia Wignera wynika, że jeżeli \mathcal{P} i \mathcal{T} są symetriami, to odpowiadają im operatory P i T , które mogą być albo liniowe i unitarne albo antyliniowe i antyunitarne. Aby sprawdzić jakimi operatorami są P i T skorzystamy z reguły mnożenia grupy Poincarego

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}\bar{a} + a)$$

\mathcal{P} i \mathcal{T} mają operatorowe reprezentacje:

$$P \equiv U(\mathcal{P}, 0), \quad T \equiv U(\mathcal{T}, 0)$$

Takie, że

$$PU(\Lambda, a)P^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \quad (3.28)$$

$$TU(\Lambda, a)T^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a), \quad (3.29)$$

Stosujemy (3.28) i (3.29) do infinitezymalnych przekształceń

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu,$$

gdzie $\omega_\nu^\mu = -\omega_\mu^\nu$ i ϵ^μ są infinitezymalne. Korzystając z

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \dots \quad (3.30)$$

i równań (3.28) i (3.29) porównując współczynniki przy ϵ_ρ otrzymujemy

$$PiP^\rho P^{-1} = i\mathcal{P}_\mu^\rho P^\mu \quad (3.31)$$

$$TiP^\rho T^{-1} = iT_\mu^\rho P^\mu \quad (3.32)$$

Teraz kładąc $\rho = 0$ w równaniach(3.31) i (3.32) otrzymujemy

$$PiHP^{-1} = iH$$

$$TiHT^{-1} = -iH$$

gdzie H jest operatorem energii. Jeżeli operator P byłby antunitarny i antyliniowy, to antykomutowałby z i , wtedy mielibyśmy $PHP^{-1} = -H$. Jednak wówczas dla każdego stanu Ψ o energii $E > 0$ istniałby stan $P^{-1}\Psi$ o energii $E < 0$. Energia nie byłaby ograniczona od dołu. Przyjmując T jako operator antyunitarny i antyliniowy dostajemy $THT^{-1} = H$ stanem o najniższej energii jest stan próżni .

3.2 Sprzężenie ładunkowe

W Kwantowej Teorii Pola istnieje także symetria sprzężenia ładunkowego między cząstkami i antycząstkami, która nie jest bezpośrednio związana z niezmienniczością Lorentzowską i ma identyczną postać we wszystkich inercyjnych układach odniesienia. To przekształcenie symetrii działa w przestrzeni Hilberta stanów fizycznych jako unitarny operator C, który powoduje liniowe przekształcenia wskaźników numerujących rodzaje cząstek.

3.3 Operatory kreacji i anihilacji

Potrzebne nam będą własności transformacyjne operatorów kreacji i anihilacji względem różnych przekształceń symetrii. Operatory C, P i T, które w przestrzeni cząstek swobodnych reprezentują sprzężenie ładunkowe, inwersję przestrzenną i przekształcenie odwrócenia czasu, transformują operatory kreacji i anihilacji działając następująco:

$$Ca^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)C^{-1} = \xi_n a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n^c) \quad (3.33)$$

$$Pa^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)P^{-1} = \eta_n a^\dagger(-\mathbf{p}, \sigma, n) \quad (3.34)$$

$$Ta^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)T^{-1} = \zeta_n (-1)^{j-\sigma} a^\dagger(-\mathbf{p}, -\sigma, n^c). \quad (3.35)$$

ξ_n , η_n i $\zeta_n (-1)^{j-\sigma}$ są fazami. Faza ξ_n nosi nazwę sprzężenia ładunkowego, a η_n parzystości wewnętrznej.

Natomiast składając operatory C i P z (3.33) i (3.34) otrzymujemy:

$$CPa^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)P^{-1}C^{-1} = \eta_n \xi_n a^\dagger(-\mathbf{p}, \sigma, n^c) \quad (3.36)$$

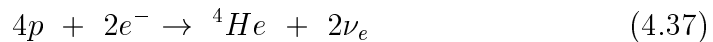
Czyli transformacja kombinowana CP przekształca cząstki o pędzie \mathbf{p} w antycząstki o pędzie $-\mathbf{p}$.

4 Przegląd doświadczeń neutrinowych

Dane uzyskane w wielu eksperymentach potwierdzają hipotezę oscylacji neutrin (np.[1],[5]). W doświadczeniach, w których źródłem neutrin jest Słońce otrzymano wyniki, świadczące o oscylacji neutrin. Także w doświadczeniu w Super-Kamiokande, gdzie badane są neutrina powstające w atmosferze ziemskiej, uzyskano dane potwierdzające oscylacje między neutrinami. W doświadczeniu akceleratorowym w Los Alamos (LSND) znaleziono pewne dane wskazujące na oscylacje $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$. Jednak w wielu doświadczeniach z neutrinami akceleratorowymi i reaktorowymi [6] nie znaleziono wskazówek potwierdzających oscylacje neutrin. Powyższe wyniki nie wykluczają się wzajemnie, a powodują ograniczenie na elementy macierzy mieszania i różnice kwadratów mas neutrin.

4.1 Doświadczenia z neutrinami słonecznymi

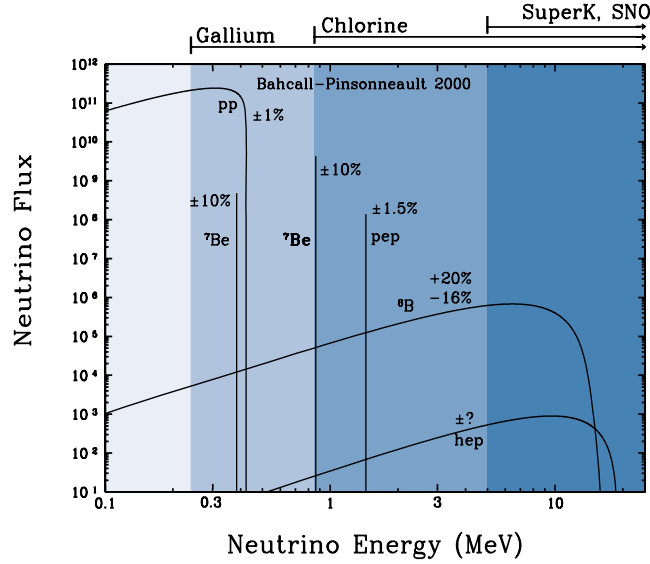
Energia w Słońcu powstaje przez reakcje termonuklearne pp i cykl CNO. Nieściśle można przyjąć, że energia Słońca jest produkowana przez przejście czterech protonów i dwóch elektronów w ${}^4\text{He}$ i dwa neutrina



Z tego wynika, że wytwarzanie energii w słońcu jest połączona z emisją neutrin elektronowych i tylko takich. Głównymi źródłami neutrin słonecznych są reakcje zapisane w poniższej tabelce

reakcja	energia neutrin (MeV)	strumień według SSM ($cm^{-2}s^{-1}$)
$pp \rightarrow de^+\nu_e$	≤ 0.42	6.0×10^{10}
$e^-{}^7\text{Be} \rightarrow \nu_e^7\text{Li}$	0.86	4.9×10^9
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{B}e^+\nu_e$	≤ 15	5.0×10^6

Jak widać z tabeli, neutrina słoneczne są w przeważającej części nisko-energetycznymi neutrinami "typu pp". Według Standardowego Modelu Słońca (SSM) strumień średnio-energetycznych monochromatycznych neutrin ${}^7\text{Be}$ zajmuje około 10% całkowitego strumienia. Natomiast strumień wysoko-energetycznych neutrin ${}^8\text{B}$ zajmuje tylko $10^{-2}\%$ całkowitego strumienia. Jest to dobrze widoczne na rys.1, który przedstawia widmo energetyczne neutrin słonecznych oraz podaje ich źródła[7].



Rysunek 1: Strumienie neutrino słonecznych według Bahcall–Pinsonneault

Ze względu na fakt, że w eksperymentach próg energii jest wysoki to właśnie neutrino 8B dają główny wkład do liczby zdarzeń.

4.1.1 Doświadczenie chlorowe: Homestake

W kopalni w Homestake w USA pod kierownictwem R. Davis w 1986 roku wykonano pierwszy radiochemiczny eksperyment, gdzie jako tarczę użyto zbiornika napełnionego płynnym C_2Cl_4 . Neutrino słoneczne wykrywano przez obserwację reakcji



Minimalna energia neutrino, dla której proces jest możliwy jest równa $E_{pr} = 0.81 \text{ MeV}$. Zatem w tym eksperymencie neutrino pp nie są wykrywane. Najważniejszy wkład do częstości zdarzeń pochodzi od wysoko-energetycznych neutrino 8B . Około 15% zdarzeń pochodzi od neutrino 7Be . Neutrino słoneczne były obserwowane w eksperymencie Davisa przez około 30 lat. Dla zaobserwowanej częstości zdarzeń Q_{Cl} , uzyskano następującą wartość

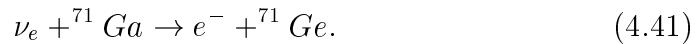
$$Q_{Cl} = 2.56 \pm 0.16 \pm 0.16 \text{ SNU}, \quad (4.39)$$

gdzie $1 \text{ SNU} = 10^{-36}$ zdarzeń/atom·s. Zaobserwowana częstość zdarzeń jest około trzy razy mniejsza niż przewidywana przez SSM

$$Q_{Cl} = 7.7 \pm 1.2 \text{ SNU}. \quad (4.40)$$

4.1.2 Doświadczenia galowe: GALLEX i SAGE

W radiochemicznych eksperymentach GALLEX (Włochy) i SAGE (Rosja) neutrina słoneczne są wykrywane przez reakcję



W eksperymencie GALLEX tarczą jest zbiornik z 30.3 tonami ${}^{71}\text{Ga}$ w roztworze chlorku galu. Natomiast w eksperymencie SAGE skorzystano z metalicznego ${}^{71}\text{Ga}$ (57 ton).

Próg energetyczny na ten proces wynosi $E_{pr} = 0.23 \text{ MeV}$. Zatem neutrina z wszystkich procesów zachodzących w słońcu są wykrywane. Częstość zdarzeń otrzymana w doświadczeniach GALLEX i SAGE są równe

$$\begin{aligned} Q_{Ga} &= 77.5 \pm 6.2_{-4.7}^{+4.3} \text{ SNU (GALLEX)} \\ Q_{Ga} &= 66.6 \pm 7.1_{-4.0}^{+6.8} \text{ SNU (SAGE)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Przewidywana częstość zdarzeń obliczona z SSM jest blisko dwa razy większa

$$(Q_{Ga})_{SSM} = 129 \pm 8 \text{ SNU} \quad (4.43)$$

4.1.3 Doświadczenia Czerenkowskie: Kamiokande i Super-Kamiokande

Neutrina słoneczne w doświadczeniach Kamiokande i Super-Kamiokande (Japonia) są wykrywane poprzez obserwację procesu



W doświadczeniu Super-Kamiokande jako detektor Czerenkowa użyto 50 kton bardzo czystej wody. Wewnętrzna powierzchnia detektora jest pokryta fotopowielaczmi za pomocą których rejestruje się promieniowanie Czerenkowa pochodzące od elektronów oddziałujących z neutronami. W eksperymencie Super-Kamiokande obserwuje się około 14 zdarzeń na dzień (w Kamiokande

wykrywano 1 zdarzenie na dzień). Ponieważ kierunek pędu elektronów odrzutu przy wysokich energiach jest praktycznie taki sam jak kierunek pędu neutrina można odróżnić neutrina pochodzące ze Słońca od innych. Energie elektronów, których promieniowanie Czerenkowa jest rejestrowane w doświadczeniach wynoszą: 7 MeV dla Kamiokande i 5 MeV dla Super-Kamiokande. W ten sposób wykrywane są tylko neutrina 8B . Wyniki eksperymentów Kamiokande i Super-Kamiokande dały następujące wartości strumieni

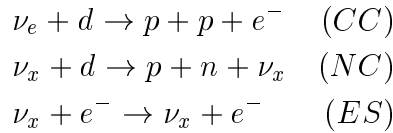
$$\begin{aligned}\Phi_{SK} &= (2.80 \pm 0.19 \pm 0.33) 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \\ \Phi_K &= (2.44 \pm 0.05_{-0.72}^{+0.09}) 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Strumień obliczony za pomocą Standardowego Modelu Słońca jest dwa razy większy

$$\Phi_{SSM} = (5.44 \pm 0.99) 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

4.1.4 Najnowsze dane: Sudbury Neutrino Observatory

18 czerwca 2001 pojawiły się pierwsze oficjalne dane z doświadczenia w Sudbury. SNO jest detektorem Czerenkowskim umieszczonym na głębokości 2070 m pod powierzchnią ziemi koło Sudbury, Ontario. Detektor zawiera 1000 ton ultra-czystej ciężkiej wody (D_2O), zawarte w sferycznym akrylowym naczyniu o promieniu 12 metrów. Dane, które dotychczas zostały opublikowane były zbierane przez 241 dni. W SNO mierzono neutrina słoneczne 8B przez reakcje:



Reakcja przez prąd naładowany (CC) jest czuła jedynie na neutrina elektrone, natomiast reakcja przez prąd neutralny (NC) zachodzić jednakowo dla wszystkich aktywnych zapachów ($x = e, \mu, \tau$). Elastyczne rozpraszanie (ES) jest także wrażliwe na wszystkie zapachy, ale przekrój czynny dla ν_μ i ν_τ jest mniejszy niż dla ν_e . W Sudbury Neutrino Observatory strumienie neutrin słonecznych 8B :

$$\begin{aligned}\Phi_{SNO}^{CC}(\nu_e) &= (1.75 \pm 0.07_{-0.11}^{+0.12}) 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \\ \Phi_{SNO}^{ES}(\nu_x) &= (2.39 \pm 0.34_{-0.14}^{+0.16}) 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Pomiar rozpraszania elastycznego (ES) jest zgodny z precyzyjnym pomiarem wykonanym przez Super-Kamiokande strumienia 8B wykorzystującym tą samą reakcję ES. Eksperyment SNO potwierdził istnienie niedoboru neutrin słonecznych, a ponadto wykazał istnienie aktywności innych neutrin niż elektronowe w strumieniu neutrin słonecznych.

4.1.5 Podsumowanie doświadczeń słonecznych

Z wyników wszystkich eksperymentów neutrin słonecznych wynika, że strumień słonecznych neutrin elektronowych w różnych zakresach energii jest znacząco mniejszy od przewidywanego strumienia. Ten deficyt znany jest jako *problem neutrin słonecznych*.

Oscylacje neutrin są najbardziej prawdopodobnym wyjaśnieniem problemu neutrin słonecznych. Jeśli neutrina oscylują to mają masę i słoneczne neutrina elektronowe na drodze do ziemi mogą przekształcić się w inne neutrina (mionowe bądź taonowe).

Neutrino słoneczne, powstające w centralnej części słońca, na drodze do ziemi przelatują przez wielką ilość materii słonecznej. Dla pewnych wartości parametrów mieszania efekt oddziaływania neutrin z materią może zwiększyć znacząco prawdopodobieństwo przejścia słonecznych neutrin elektronowych w inne stany. Jest to tak zwany efekt MSW[8][9] (Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein)

4.2 Eksperymenty neutrin atmosferycznych

Neutrino atmosferyczne są neutrinami elektronowymi oraz mionowymi i ich antycząstkami, które powstały w prysznicu hadronów wywołanym promieniami kosmicznymi w atmosferze ziemi.

Neutrino atmosferyczne mogą być bezpośrednio obserwowane przez reakcje oddziaływania przez prąd naładowany (CC).

$$\begin{aligned}\nu_e(\bar{\nu}_e) + A &\rightarrow e^-(e^+) + X, \\ \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + A &\rightarrow \mu^-(\mu^+) + X.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Obliczenia strumienia neutrin atmosferycznych przewiduje, że stosunek ν_μ/ν_e zależy od energii i kąta między zenitem a trajektorią neutrina. Dla niskich energii i poziomej trajektorii stosunek $\nu_\mu/\nu_e \sim 2$, ale wzrasta dla

większych energii i trajektorii bliższych pionowej. Stosunek ν_μ/ν_e był zmierzony w wielu doświadczeniach, a Kamiokande i IMB ogłosiły mniejszy od oczekiwanego stosunek w zebranych przez nich zdarzeń

$$R\left(\frac{\mu}{e}\right) \equiv [(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu) / (\nu_e + \bar{\nu}_e)]_{dane} / [(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu) / (\nu_e + \bar{\nu}_e)]_{MC} \simeq 0.6,$$

gdzie MC oznacza symulacje Monte Carlo bez oscylacji neutrin. Różnica między przewidywanym, a obserwowanym strumieniem neutrin atmosferycznych nazwano *anomalią neutrin atmosferycznych*. Istnienie anomalii zostało później potwierdzone przez doświadczenia Soudan 2, MACRO i Super-Kamiokande. Grupa z Super-Kamiokande otrzymała przekonujące dowody asymetrii góra-dół i zależność od kąta niedoboru strumienia neutrin mionowych, które może być zinterpretowane jako manifestujący oscylacje neutrin.

W Super-Kamiokande zdarzenia z neutrinami atmosferycznymi podzielono na kilka grup zależnych od energii produkowanego naładowanego leptonu. Mierzone zdarzenia podzielono także na całkowicie zawarte (FC) w detektorze, tzn. wierzchołek oddziaływania jest zlokalizowany w detektorze i żadna z powstałych cząstek nie wydostaje się z niego. Zderzenia FC są dalej podzielone na sub-GeV (zakres energii <1.33 GeV) i multi-GeV (zakres energii >1.33 GeV). Natomiast zdarzenia częściowo zawarte (PC) w detektorze, to takie dla których produkowany mion opuszcza wewnętrzny detektor. Średnia energia produkcji neutrina w zdarzeniu typu PC wynosi ~ 15 GeV. Neutrino mionowe mogą być także wykrywane niebezpośrednio przez obserwacje mionów, które zostały wyprodukowane w materii otaczającej detektor. Aby zredukować tło bierze się pod uwagę jedynie mionu, które poruszają się do góry (upward-going). Pomiar podwójnego stosunku $R(\mu/e)$ dla zdarzeń FC w Super-Kamiokande dał następujące wyniki:

$$\begin{aligned} R &= 0.652 \pm 0.019 \pm 0.051 \text{ (sub-GeV)} \\ R &= 0.668 \pm 0.034 \pm 0.079 \text{ (multi-GeV)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Wartość R jest znacznie mniejsza o jedność, której powinna być równa w przypadku bez oscylacji.

Przedyskutujemy teraz rozkład zdarzeń neutrin atmosferycznych w zależności od kąta. Odległość jaką przebywają neutrino zanim dotrą do detektora dla różnych kątów znacznie się różnią: dla pionowej trajektorii (kąt $\Theta_\nu = 0$) $L \sim 15km$; dla poziomej trajektorii (kąt $\Theta_\nu = 90^\circ$) $L \sim 500km$, a dla neutrin przechodzących przez środek Ziemi (kąt $\Theta_\nu = 180^\circ$) $L \sim 13000km$.

Parametr charakteryzujący zniekształcenie rozkładu kąтового jest stosunek zdarzeń góra–dół U/D , gdzie U odpowiadają zdarzenia z $\cos\Theta < -0.2$, a D zdarzenia z $\cos\Theta > 0.2$. Oczekuje się, że strumień neutrin atmosferycznych jest symetryczny ze względu na kąt dla energii neutrin $E \gtrsim 1\text{GeV}$. Geograficzne ustawienie detektora SK powoduje, że oczekiwany stosunek U/D jest odrobinę większy od jednościci. Natomiast stosunek U/D zmierzony w Super-Kamiokande dla zdarzeń typu μ wynosi:

$$U/D = 0.54 \pm 0.04 \pm 0.01 \quad (4.47)$$

czyli jest znacznie mniejszy od przewidywanego.

Wyniki otrzymane w Super-Kamiokande, jak też w innych doświadczeniach można wytłumaczyć oscylacjami neutrin. Jednak nie można wyjaśnić *anomalii neutrin atmosferycznych* za pomocą oscylacji $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e$, ponieważ nie zarejestrowano nadwyżki neutrin elektronowych oraz ze względu na surowe ograniczenie na te oscylacje przez doświadczenie reaktorowe CHOOZ[6], które wyklucza te oscylacje jako główny kanał oscylacji neutrin atmosferycznych.

4.3 Eksperyment LSND

Inne ciekawy wynik otrzymano także w eksperymencie z krótką bazą z Los Alamos. W eksperymencie wiązka pionów produkowana była przez zderzenie protonów o energii 800 MeV z miedzianą tarczą. W tej tarczy mezony π^+ zatrzymują się i rozpadają na antymion i neutrino mionowe ($\mu^+ + \nu_\mu$). Produkowane miony także zatrzymują się na tarczy i rozpadają: $\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$. W ten sposób w rozpadzie dodatnich pionów i antymionów produkowane są neutrino mionowe ν_μ , antyneutrino mionowe $\bar{\nu}_\mu$ oraz neutrino elektronowe ν_e . Zauważmy, że w tych rozpadach nie powstają antyneutrino elektronowe $\bar{\nu}_e$. Są one wytwarzane w łańcuchu rozpadu π^- , ale te praktycznie całkowicie zostają wychwycone przez jądra i nie mają czasu aby się rozpaść.

W eksperymencie LSND detektor neutrin umieszczono w odległości około 30 km od tarczy. Antyneutrino $\bar{\nu}_e$ szukano przez obserwację klasycznego procesu

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (4.48)$$

W przedziale energii pozytonów $30 < E < 60 \text{ MeV}$ zaobserwowano $87.9 \pm 22.4 \pm 6.0$ zdarzeń. Zaobserwowany sygnał można wytłumaczyć przez oscylacje $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Jeśli weźmiemy pod uwagę wyniki innych eksperymentów,

z krótką bazą gdzie nie znaleziono oscylacji neutrin to z eksperymentu LSND można znaleźć następujące zasięgi parametrów oscylacji

$$0.2 \leq \Delta m^2 \leq 1eV \quad 2 \cdot 10^{-3} \leq \sin^2 2\theta \leq 4 \cdot 10^{-2} \quad (4.49)$$

Wyniki otrzymane w LSND będą sprawdzone w eksperymencie BOONE (Fermilab, USA), który zacznie działać w 2002 r.

5 Prawdopodobieństwo oscylacji

Opisane w rozdziale 4 doświadczenia można wyjaśnić zakładając, że neutrina są cząstkami masowymi. Nadanie neutrinom mas różnych od zera i jednocześnie różnych od siebie umożliwia zjawisko oscylacji neutrin. Ideę oscylacji neutrin do fizyki wprowadził w 1958 B. Pontecovo. Istota tego zjawiska jest bardzo prosta. Dla przykładu można rozważyć dwupoziomowy układ kwantowy. Jeśli jest w jednym z jego stanów stacjonarnych $|\Psi_i\rangle$ (stan własny Hamiltonianu), to pozostanie w tym stanie, a ewolucja funkcji falowej dodaje tylko czynnik fazowy: $|\Psi_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\Psi_i(0)\rangle$. Jednak jeśli układ jest przygotowany w stanie, który nie jest stanem własnym Hamiltonianu, prawdopodobieństwo znalezienia układu w tym stanie będzie oscylować w czasie z częstotliwością $\omega_{21} = E_2 - E_1$, gdzie E_1 i E_2 są energiami własnymi układu.

W przypadku oscylacji neutrin, neutrina są produkowane i wykrywane przez prąd naładowany słabego oddziaływania w stanach zapachowych ν_e , ν_μ , lub ν_τ . Jednak neutrinowa macierz mas w bazie zapachowej nie jest diagonalna. To oznacza, że stany własne masy ν_1 , ν_2 i ν_3 są różne od zapachowych stanów własnych. Zatem prawdopodobieństwo znalezienia neutrina wyprodukowanego w danym zapachu będzie oscylować w czasie.

Przejdę teraz do rozważania prawdopodobieństwa oscylacji neutrin. Na początek wyprowadzę wzór na prawdopodobieństwo w przypadku dwóch rodzin neutrin, a następnie przejdę do układu trzech neutrin. Przejście do trzech rodzin neutrin bardzo komplikuje rozpatrywany problem, ale umożliwia wprowadzenie efektu łamania symetrii CP. Kolejnym krokiem będzie wprowadzenie efektów związanych z przechodzeniem neutrin przez materię w układzie trzech neutrin. Wprowadzenie trzech neutrin, a następnie efektów materialnych spowodowało pojawienie się tak wielu czynników, że niezbędne będą obliczenia numeryczne.

5.1 Prawdopodobieństwo oscylacji dla układu dwóch neutrin

Na początek wyprowadzę wzór na prawdopodobieństwo oscylacji kiedy mamy tylko dwa neutrina Diraca, które są stanami własnymi masy i dwa neutrina, które są stanami zapachowymi dajmy na to elektronowe i mionowe. Stany własne energii i zapachu są związane z sobą macierzą mieszania CKM:

$$|\nu_a\rangle = \sum_i U_{ai} |\nu_i\rangle \quad (5.50)$$

Ewolucja stanu jest opisana przez:

$$|\nu(t)\rangle = U_{bj}^* e^{-iE_j t} |\nu_j\rangle \quad (5.51)$$

Amplitudę prawdopodobieństwa przejścia ze stanu zapachowego b w a po czasie t można obliczyć przez bardzo proste rachunki:

$$\begin{aligned} A(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= \langle \nu_a | \nu(t) \rangle \\ &= U_{bj}^* e^{-iE_j t} \langle \nu_a | \nu_b \rangle \\ &= U_{aj} U_{bj}^* e^{-iE_j t} \langle \nu_i | \nu_j \rangle \\ &= U_{aj} e^{-iE_j t} U_{bj}^* \end{aligned}$$

Natomiast prawdopodobieństwo oscylacji ze stanu zapachowego b w stan zapachowy a po czasie t:

$$P(\nu_b \rightarrow \nu_a) = |A(\nu_b \rightarrow \nu_a)|^2 \quad (5.52)$$

Macierz mieszania dla dwóch zapachów ma postać (patrz dodatek)

$$U = \begin{pmatrix} U_{b1} & U_{b2} \\ U_{a1} & U_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Zatem

$$\begin{aligned} P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= |U_{a1} e^{-iE_1 t} U_{b1} + U_{a2} e^{-iE_2 t} U_{b2}|^2 \\ &= |-sc e^{-iE_1 t} + sce^{-iE_2 t}|^2 \\ &= |sc (-e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t})|^2 \\ &= sc (-e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t}) sc (-e^{iE_1 t} + e^{iE_2 t}) \\ &= (sc)^2 (1 - e^{-iE_1 t} e^{iE_2 t} - e^{-iE_2 t} e^{iE_1 t} + 1) \\ &= (sc)^2 (2 - e^{i(E_2 - E_1)t} - e^{-i(E_2 - E_1)t}), \end{aligned}$$

gdzie $s = \sin\theta$ i $c = \cos\theta$.

Teraz korzystając z przybliżenia ultrarelatywistycznego

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \approx p + \frac{m_i^2}{2E} \quad (5.53)$$

otrzymuję

$$\begin{aligned} P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= (sc)^2 \left(2 - e^{-i\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}t} - e^{i\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}t} \right) = 2(sc)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{2E}t\right) \right) \\ &= 2(sc)^2 \left(1 - \cos 2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}t\right) \right) = 2(sc)^2 \left(2\sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}t\right) \right) \\ &= (2sc)^2 \left(\sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}t\right) \right) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}t\right), \end{aligned}$$

gdzie $\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$.

Czyli prawdopodobieństwo znalezienia neutrina w stanie zapachowym a po czasie t , jeśli w chwili $t = 0$ mieliśmy neutrina w stanie b wynosi:

$$P(\nu_b \rightarrow \nu_a) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E}t\right)$$

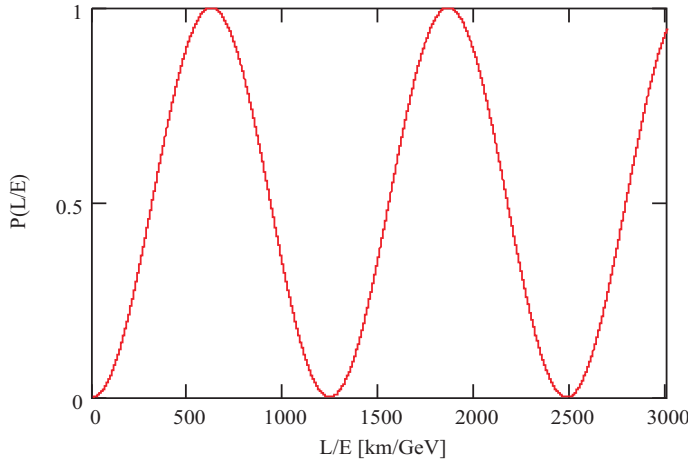
Wzór na prawdopodobieństwo oscylacji można też wyrazić w zależności od odległości (patrz dodatek B):

$$P(\nu_b \rightarrow \nu_a; L) = \sin^2 2\theta \sin^2\left(1.27\Delta m^2 \frac{L}{E}\right) \quad (5.54)$$

Przy czym L jest podana w km , E w GeV , a Δm^2 w eV^2 . Prawdopodobieństwo dla antyneutrino ma dokładnie taką samą postać, ponieważ macierz mieszania w przypadku dwurodzinnym jest rzeczywista. Wykres 2 przedstawia zależność prawdopodobieństwa oscylacji.

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo oscylacji układu dwóch neutrin można wyznaczyć różnice kwadratów mas neutrin. Ten parametr odpowiada za okres oscylacji. Jest to uproszczenie stosowane przy dopasowywaniu parametrów do danych doświadczalnych.

Teraz jeśli istniejące anomalie neutrinowe (problem neutrina słonecznych, anomalia neutrin atmosferycznych i wynik LSND) tłumaczyć przez oscylacje neutrin, to wymagane są trzy skale różnic kwadratów mas: $\Delta m_{\odot}^2 \lesssim 10^{-4}eV^2$, $\Delta m_{atm}^2 \sim 10^{-3}eV^2$, $\Delta m_{LSND}^2 \gtrsim 0.2eV^2$. Jest to możliwe tylko, gdy istnieją cztery rodzaje neutrin. Jednak neutrina czwartej rodziny nie może być podobne do pozostałych trzech, ponieważ byłoby to sprzeczne z doświadczalnie zmierzoną szerokością rozpadu bozonu Z^0 . Zatem wynik z LSND, jeśli jest poprawny, implikuje istnienie lekkiego neutrina sterylne.



Rysunek 2: Prawdopodobieństwo oscylacji neutrin w przypadku 2 zapachowym. Wartość kąta mieszania przyjąłem $\theta = \frac{\pi}{4}$, a $\Delta m_{21} = 2 \cdot 10^{-3} eV^2$

5.2 Prawdopodobieństwo oscylacji dla układu trzech neutrin

Przejście z przypadku 2-rodzinnego do 3-rodzinnego nie jest trywialne ponieważ mamy teraz do czynienia z macierzą mieszania o wymiarze 3x3. Ogólnie macierz unitarną 3x3 można sparametryzować za pomocą 4 parametrów: trzech kątów mieszania i **jednej fazy**

$$P(\nu_b \rightarrow \nu_a) = |U_{bj} e^{-iE_j t} U_{aj}^*|^2$$

gdzie macierz mieszania ma teraz ogólną postać ¹:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} s_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix}$$

Ze względu na długie rachunki wyprowadzenie wzoru na prawdopodobieństwo oscylacji neutrin w przypadku trzech zapachów zamieszczone jest w dodatku (A).

Prawdopodobieństwo oscylacji neutrina w stanie zapachowym b do neutrina

¹Według Particle Data Group

w stanie zapachowym a na drodze L wynosi:

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a; L) = & 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta_{13}L}{2}\right) - 4 \operatorname{Re}[U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2}] \sin^2\left(\frac{\Delta_{12}L}{2}\right) + \\
& + 4J \left(\sin(\Delta_{12}L) \sin^2\left(\frac{\Delta_{13}L}{2}\right) - \sin(\Delta_{13}L) \sin^2\left(\frac{\Delta_{12}L}{2}\right) \right) + \delta_{ab} \left(1 - 4 |U_{a3}|^2 \sin^2\left(\frac{\Delta_{13}L}{2}\right) \right) + \\
& + 2 \operatorname{Re}[U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] \left(\sin(\Delta_{13}L) \sin(\Delta_{12}L) - 2 \cos(\Delta_{13}L) \sin^2\left(\frac{\Delta_{12}L}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Tutaj

$$\Delta_{ij} = 2.534 \frac{\Delta m_{ij}^2 [eV^2]}{E [GeV]} \tag{5.56}$$

Natomiast

$$J_{\alpha\beta;ij} \equiv \operatorname{Im}[U_{\alpha i}U_{\alpha j}^*U_{\beta i}^*U_{\beta j}] \tag{5.57}$$

J jest wielkością przez którą do wzoru na prawdopodobieństwo oscylacji wchodzi efekt łamania CP. J jest całkowicie antysymetryczny na zamianę indeksów (patrz dodatek D.2). Wielkość J została wprowadzona przez C. Jarlskog [13] w przypadku mieszania kwarków.

Mając wzór (5.55) na prawdopodobieństwo oscylacji można dokładniej przypatrzeć się jego budowie w szczególności części odpowiedzialnej za łamanie symetrii CP. Można zdefiniować wielkość, która powinna określać stopień łamania symetrii CP

$$DCP = P(\nu_a \rightarrow \nu_b) - P(\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b). \tag{5.58}$$

Część wzoru na prawdopodobieństwo oscylacji z czynnikiem Jarlskog jest jedynym wkładem, które jest czułe na zamianę cząstek antycząstkami. Oznaczmy część odpowiedzialną za łamanie CP :

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_b \rightarrow \nu_a) = 4J \left(\sin(\Delta_{12}L) \sin^2\left(\frac{\Delta_{13}L}{2}\right) \right) - \sin(\Delta_{13}L) \sin^2\left(\frac{\Delta_{12}L}{2}\right)$$

Wzory na oscylacje neutrin i antyneutrin można zapisać :

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b) = P_{CP}(\nu_a \rightarrow \nu_b) + P_{\mathcal{CP}}(\nu_a \rightarrow \nu_b) \tag{5.59}$$

$$P(\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b) = P_{CP}(\nu_a \rightarrow \nu_b) - P_{\mathcal{CP}}(\nu_a \rightarrow \nu_b), \tag{5.60}$$

ponieważ

$$P_{CP}(\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b) = P_{CP}(\nu_a \rightarrow \nu_b)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b) = -P_{\mathcal{CP}}(\nu_a \rightarrow \nu_b)$$

Zatem dla prawdopodobieństwa oscylacji w próżni wielkość (5.58) ma postać

$$DCP = 2P_{\mathcal{CP}}(\nu_a \rightarrow \nu_b). \tag{5.61}$$

5.3 Wybór parametrów

Jak pokazano wyżej ze wzoru na prawdopodobieństwo oscylacji neutrin (5.55) można wydzielić część, która odpowiada za efekt łamania symetrii CP. Jednak sam czynnik Jarlskog jest dla danej fazy CP stały i można jedynie zastanowić się dla jakich zmiennych i parametrów funkcja stojąca przy nim ma największą wartość.

Interesująca nas funkcja ma następującą postać:

$$F_J(\Delta_{13}, \Delta_{12}, \frac{L}{E}) = \sin\left(\frac{L}{E}\Delta_{12}\right) \sin^2\left(\frac{L}{E}\frac{\Delta_{13}}{2}\right) - \sin\left(\frac{L}{E}\Delta_{13}\right) \sin^2\left(\frac{L}{E}\frac{\Delta_{12}}{2}\right) \quad (5.62)$$

Przy czym różnice kwadratów mas są parametrami, które można wyznaczyć eksperymentalnie. Łączy je związek

$$\Delta_{13} = a\Delta_{12},$$

gdzie z dotychczasowych eksperymentów mamy ograniczenia na współczynnik a :

$$a = 5 \cdot 10^1 - 10^7$$

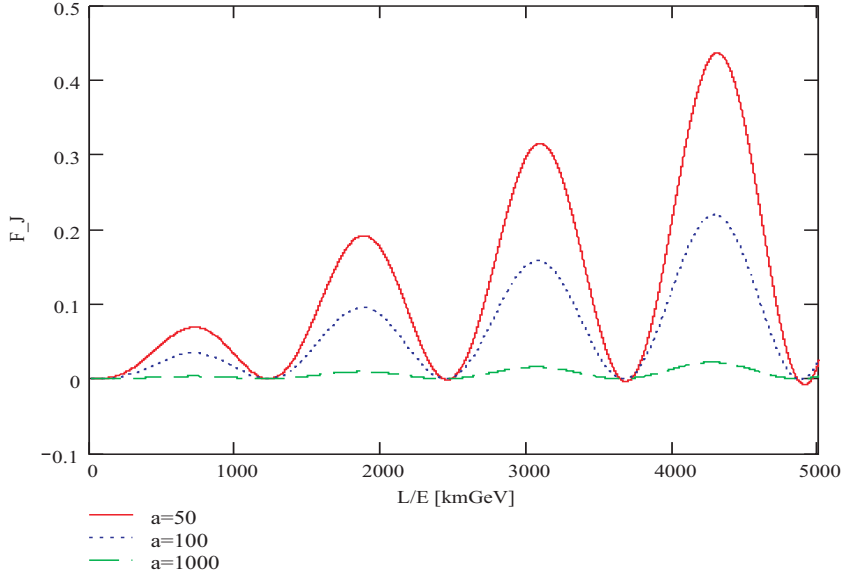
Różne wartości współczynnika a odpowiadają różnym rozwiązaniom *problemu neutrin słonecznych*. Wykreślając funkcję F_J można ograniczyć nasze dalsze rozważania jeśli weźmie się pod uwagę fakt, że potrzebujemy rozsądnych pod względem doświadczenia wielkości. Na rysunku 3 przedstawione są wykresy funkcji (5.62) dla trzech wartości parametru a . Na wykresie wraz ze wzrostem wartości współczynnika a wartość funkcji F_J dramatycznie maleje.

Znając wzór na prawdopodobieństwo oscylacji neutrin z jednego stanu zapachowego do innego można przedstawić je na wykresie. Dla wszystkich wykresów i obliczeń będę przyjmował takie same parametry:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= 30.6^\circ, \quad \theta_{13} = 15.5^\circ, \quad \theta_{23} = 50.8^\circ \\ \Delta m_{21}^2 &= 4 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta m_{32}^2 = 2 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Powyższe wartości parametrów są zaczerpnięte z pracy J.W.F Valle [10], gdzie podczas dofitowywania danych wzięto dane z doświadczeń słonecznych, atmosferycznych i reaktorowych (Chooz), natomiast pominięto dane z LSND. Teraz można zapisać wzór na prawdopodobieństwo oscylacji w postaci, która będzie też stosowana w przypadku oscylacji w materii:

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b) = -4 \sum_{i < j} [\text{Re}(U_{ai}U_{bj}U_{aj}^*U_{bi}^*) \sin^2(\Delta_{ij})] + 8J \prod_{i < j} \sin(\Delta_{ij}), \quad (5.63)$$



Rysunek 3: Wykresy funkcji przy współczynniku Jarlskog $F_J(\frac{L}{E})$ dla trzech wartości parametru $\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} = a$. $\Delta m_{31}^2 = 3 \cdot 10^{-3} eV^2$

gdzie $\Delta_{ij} = 1.27 \frac{\Delta m_{ij}^2 [eV^2] L [km]}{E [GeV]}$.

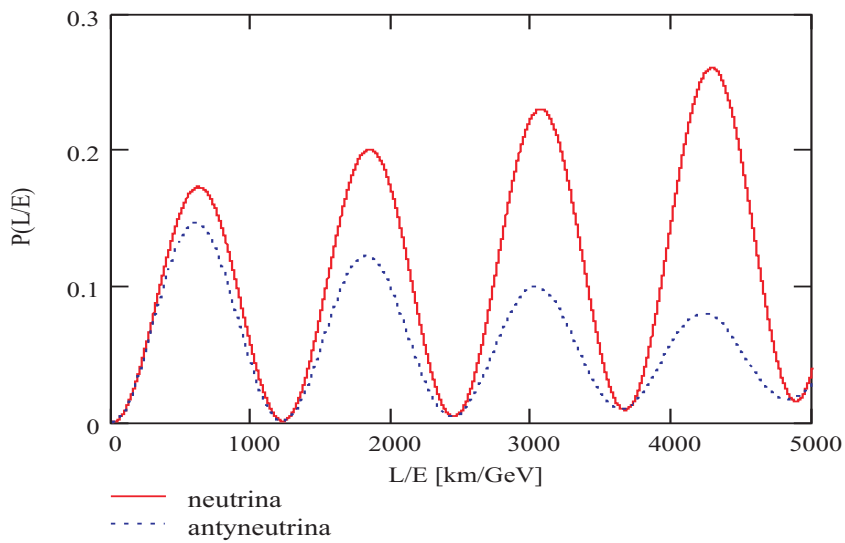
Prawdopodobieństwo dla antyneutrino lub prawdopodobieństwo $P(\nu_b \rightarrow \nu_a)$ otrzymujemy przez zmianę znaku przy współczynniku Jarlskog:

$$\begin{aligned}
 P(\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b) &= P(\nu_b \rightarrow \nu_a) = \\
 &= -4 \sum_{i < j} [\text{Re}(U_{ai} U_{bj} U_{aj}^* U_{bi}^*) \sin^2(\Delta_{ij})] - 8J \prod_{i < j} \sin(\Delta_{ij}) \quad (5.64)
 \end{aligned}$$

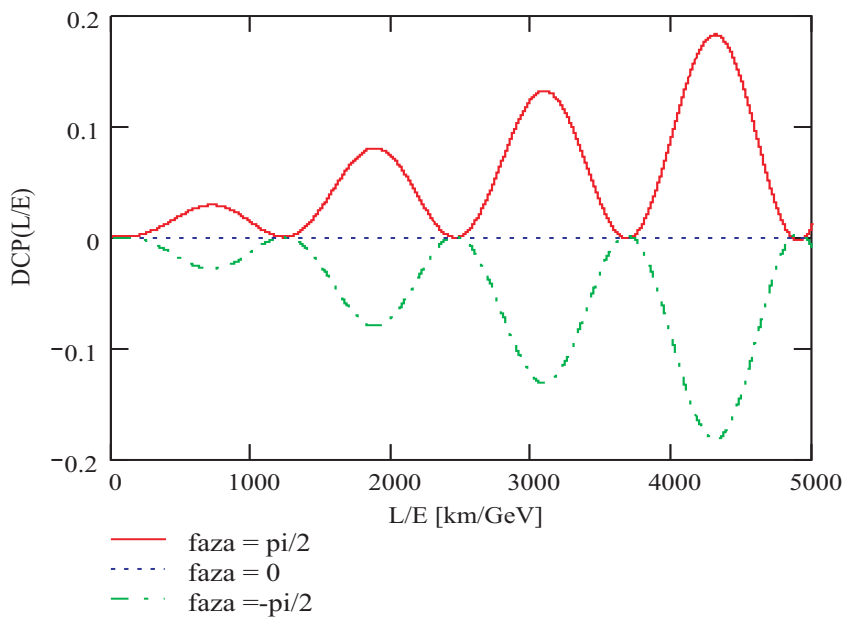
Wykres prawdopodobieństwa oscylacji neutrin ze stanu elektronowego do mionowego został wykreślony na rysunku 4

Z rysunku 4 widać różnicę w prawdopodobieństwie oscylacji neutrin i antyneutrino. Ta rozbieżność wynika z niezerowej fazy łamania CP. Korzystając z (5.58) można zobaczyć jak wygląda efekt łamania symetrii CP.

Na rysunku 5 widać, że DCP istnieją maksima. Pierwsze maksimum znajduje się dla $L/E \simeq 625 \text{ km/GeV}$, a kolejne maksima są od siebie oddalone o $L/E \simeq 1250 \text{ km/GeV}$. Za ten okres odpowiada Δm_{31}^2 w argumentach funkcji trygonometrycznych we wzorze na prawdopodobieństwo oscylacji. Istnieje drugi okres za który wynika z Δm_{21}^2 . Drugi okres jest niewidoczny, ponieważ jest 50 razy większy i nie zdążył się rozwinąć.



Rysunek 4: Wykres prawdopodobieństwa oscylacji neutrino (linia ciągła) i antyneutrino (linia przerywana) ze stanu elektronowego do stanu mionowego. Przyjęto fazę CP równą $\frac{\pi}{2}$,



Rysunek 5: Wykres różnicy prawdopodobieństwa oscylacji neutrino i antyneutrino ze stanu elektronowego do stanu mionowego dla trzech wartości fazy CP.

Oczywiście ze wzorów (5.63) i (5.64) od razu wynika, że zmiana znaku fazy łamania CP spowoduje tylko zmianę znaku *DCP*.

6 Oddziaływanie neutrin z materią

Jeśli neutrina przechodzą przez materię, to mogą oddziaływać z elektronami i nukleonami, z której się składa. Ten efekt po raz pierwszy był rozważany przez Wolfensteina [9] w 1978 roku. Później znaczenie tego efektu dla neutrin został podkreślony przez Mikheyeva i Smirnova[8] w 1985 roku. Dlatego efekt związany z materią nazywany jest efektem MSW.

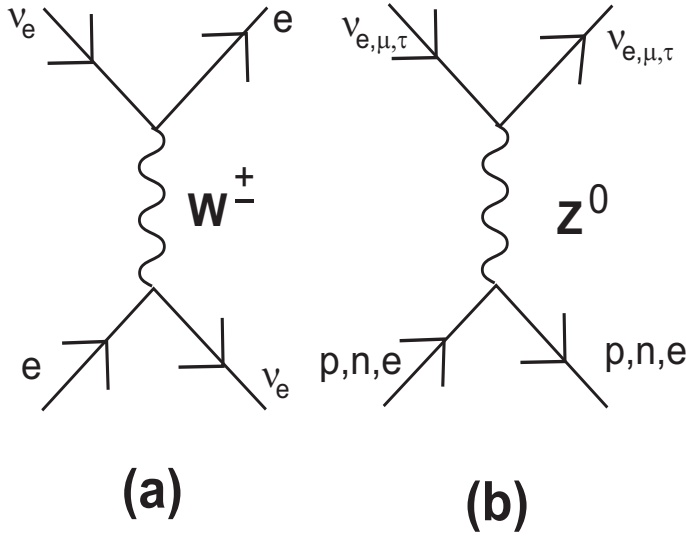
W próżni leptonowa macierz mieszania zapachów U łączy masowe stany własne (ν_1, ν_2, ν_3) z zapachowymi stanami własnymi $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$. W bazie zapachowej, gdzie macierz mas leptonów naładowanych M_l jest diagonalna ($M_l = \text{Diag}\{m_e, m_\mu, m_\tau\}$), efektywny hamiltonian odpowiadający za propagację neutrin w materii można zapisać jako $H_\nu = \Phi_\nu^m/2E$, gdzie $\Phi_\nu^m = \Phi_\nu + \Phi_A$, a

$$\phi_\nu = U \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} U^\dagger, \phi_A = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

Tutaj m_i (dla $i=1,2,3$) oznaczają stany własne Hamiltonianu swobodnego neutrin, natomiast $A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$ (patrz dodatek C) opisuje wkład prądu naładowanego do rozproszenia wprzód $\nu_e e^-$, N_e jest gęstością tła elektronów, a E oznacza energię wiązki neutrin. Wkład od prądu neutralnego, który jest uniwersalny dla neutrin ν_e, ν_μ i ν_τ leży tylko w ogólnej nieobserwowalnej fazie i może zostać pominięty.

Można zdiagnozować ϕ_ν^m unitarną transformacją: $V^\dagger \phi_\nu^m V = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, gdzie λ_i oznaczają wartości własne Hamiltonianu z oddziaływaniem, które należy traktować jako kwadraty efektywnych mas trzech neutrin w materii. Jawna postać wielkości materialnych[11] [12]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m_1^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 3y} \left[z + \sqrt{3(1 - z^2)} \right], \\ \lambda_2 &= m_1^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 3y} \left[z - \sqrt{3(1 - z^2)} \right], \\ \lambda_3 &= m_1^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 3y}, \end{aligned} \quad (6.66)$$



Rysunek 6: Diagramy oddziaływania neutrin: (a) oddziaływanie przez prąd naładowany–tylko neutrina elektronowe, (b) oddziaływanie przez prąd neutralny–wszystkie neutrina

gdzie x , y i z są dane przez:

$$\begin{aligned}
 x &= \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{31}^2 + A, \\
 y &= \Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 + A [\Delta m_{21}^2 (1 - |U_{e2}|^2) + \Delta m_{31}^2 (1 - |U_{e3}|^2)], \\
 z &= \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{2x^3 - 9xy + 27A\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 |U_{e1}|^2}{2(x^2 - 3y)^{3/2}} \right]
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

z $\Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ i $\Delta m_{31}^2 \equiv m_3^2 - m_1^2$.

Zauważmy, że macierz unitarna V , która diagonalizuje całkowity Hamiltonian jest leptonową macierzą mieszania w materii. Można obliczyć elementy tej macierzy

$$V_{\alpha i} = \frac{N_i}{D_i} U_{\alpha i} + \frac{A}{D_i} U_{ei} [(\lambda_i - m_j^2) U_{ek}^* U_{\alpha k} + (\lambda_i - m_k^2) U_{ej}^* U_{\alpha j}], \tag{6.68}$$

gdzie α przebiega przez (e, μ, τ) , a (i, j, k) przez $(1, 2, 3)$ z $i \neq j \neq k$, oraz

$$\begin{aligned}
 N_i &= (\lambda_i - m_j^2) (\lambda_i - m_k^2) - A [(\lambda_i - m_j^2) |U_{ek}|^2 + (\lambda_i - m_k^2) |U_{ej}|^2], \\
 D_i^2 &= N_i^2 + A^2 |U_{ei}|^2 [(\lambda_i - m_j^2)^2 |U_{ek}|^2 + (\lambda_i - m_k^2)^2 |U_{ej}|^2].
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

Znając elementy macierzy mieszania w materii można za ich pomocą wyznaczyć prawdopodobieństwo oscylacji neutrin:

$$P_m(\nu_a \rightarrow \nu_b) = -4 \sum_{i < j} [\text{Re}(V_{ai}V_{bj}V_{aj}^*V_{bi}^*) \sin^2(\Delta_{ij})] + J_m \prod_{i < j} \sin(\Delta_{ij}) \quad (6.70)$$

gdzie J_m jest współczynnikiem Jarlskog w materii i można go przedstawić w bardzo zwarty sposób [13]:

$$J_m(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) = J\Delta m_{21}^2 \Delta m_{31}^2 \Delta m_{32}^2 \quad (6.71)$$

Natomiast dla antyneutrin relacje (6.66) - (6.71) otrzymujemy przez zamianę $A \Rightarrow -A$, $U \Rightarrow U^*$, a $J_m(A) \Rightarrow -J_m(-A)$. Ażeby otrzymać prawdopodobieństwo oscylacji dla $P_m(\nu_b \rightarrow \nu_a)$ musimy we wzorze (6.70) zamienić $J_m(A) \Rightarrow -J_m(A)$, a dla antyneutrin $P_m(\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b) \rightarrow P_m(\bar{\nu}_b \rightarrow \bar{\nu}_a)$ zamieniamy $J_m(-A) \Rightarrow -J_m(-A)$.

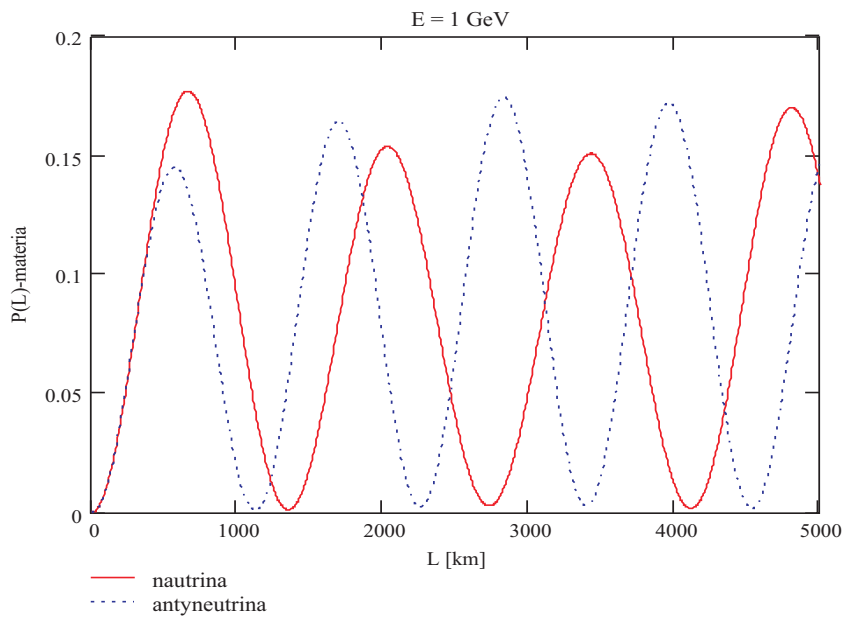
6.1 Oscylacje neutrin i łamanie symetrii CP

W przypadku oscylacji w próżni stosowałem zmienną $x = \frac{L}{E}$, ale w przypadku oscylacji w materii nie ma ona już znaczenia, ponieważ energia E wchodzi do wzoru na prawdopodobieństwo w bardziej skomplikowany sposób. Rysunki (7) i (8) przedstawiają prawdopodobieństwo oscylacji neutrin ze stanu elektronowego do mionowego w przypadku przechodzenia przez materialny ośrodek. Tutaj i w całej pracy przyjąłem gęstość ośrodka $\rho = 2.8 \frac{g}{cm^3}$. Taka wartość gęstości ośrodka odpowiada zewnętrznej warstwie ziemi.

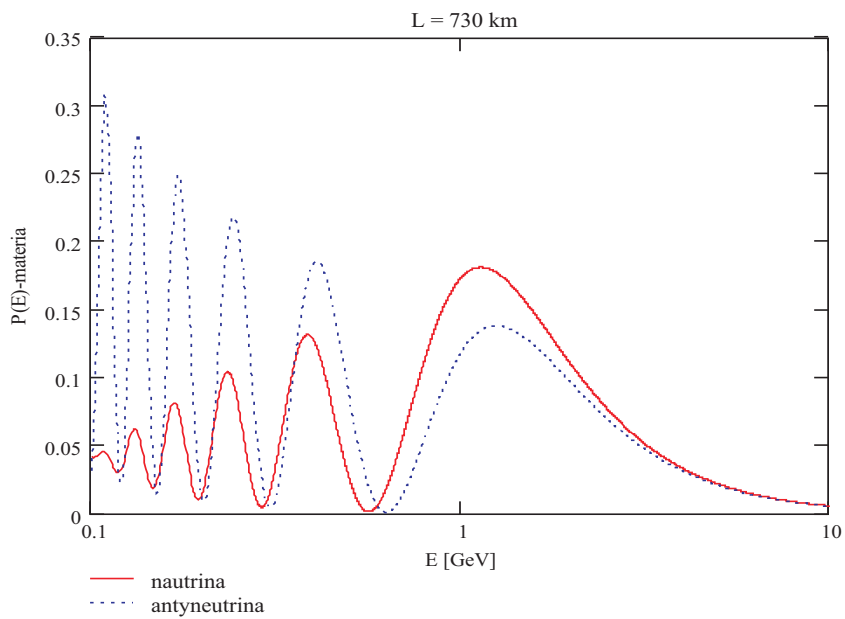
Na rysunku (7) można zauważyć, że w przeciwieństwie do przypadku oscylacji neutrin w próżni, neutrina i antyneutrino oscylują z nieco innym okresem. Na rysunku (8) widać, że dla odległości 730 km pierwsze szerokie maksimum istnieje przy energii 1 GeV. Jest to ważne dla ewentualnego doświadczenia, ponieważ w wiązka wyprodukowanych neutrin ma pewien rozkład energii. Można zauważyć, że dla odległości 730 km zarówno dla oscylacji w próżni jak i w materii energia 1 GeV jest najbardziej korzystna do obserwacji oscylacji neutrin.

Na rysunkach (9), (11), (10) i (12) zostały porównane prawdopodobieństwa oscylacji neutrin i antyneutrin w próżni i materii².

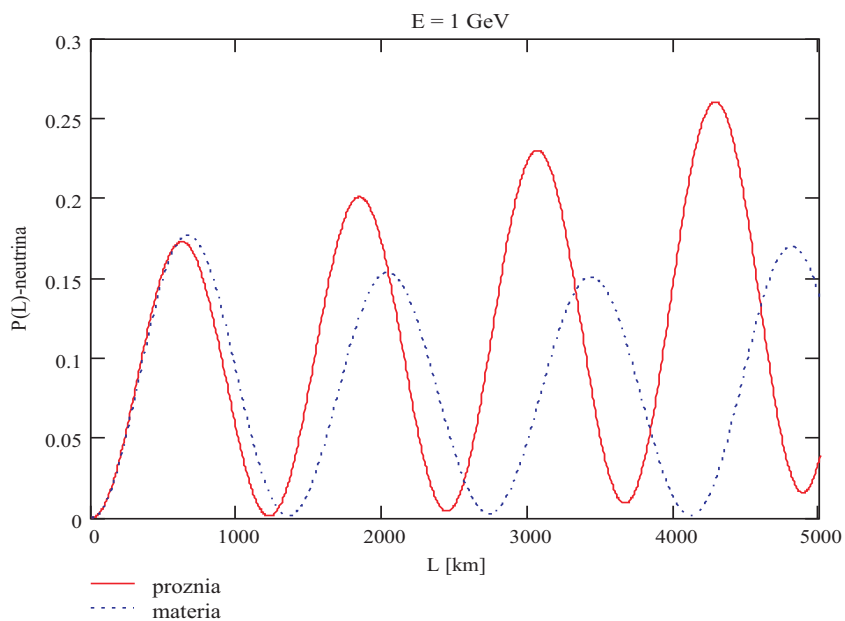
²W całej pracy przyjmuję fazę CP równą $\frac{\pi}{2}$, a w przeciwnym razie będzie to podkreślone



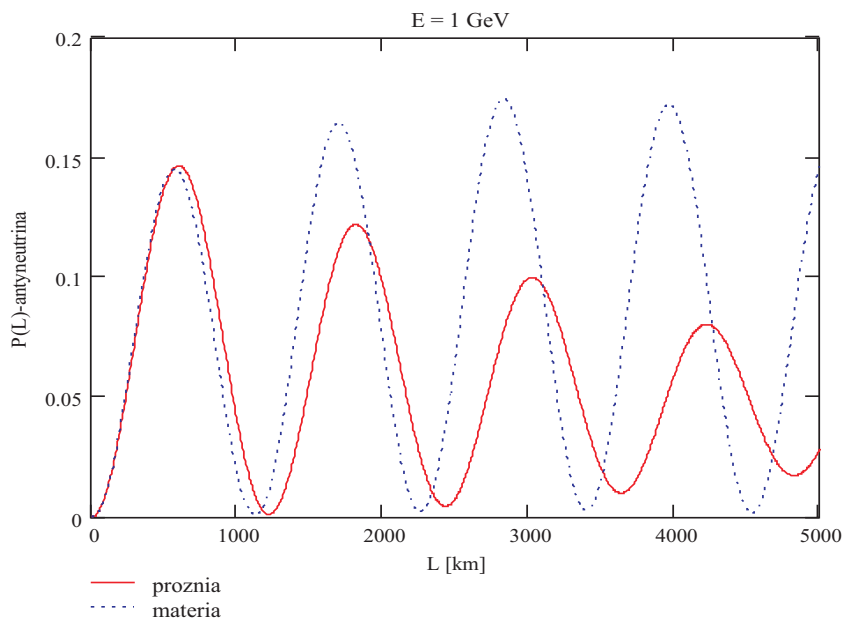
Rysunek 7: Wykres prawdopodobieństwa oscylacji neutrin i antyneutrin ze stanu elektronowego do stanu mionowego $P(L, E=1\text{GeV})$



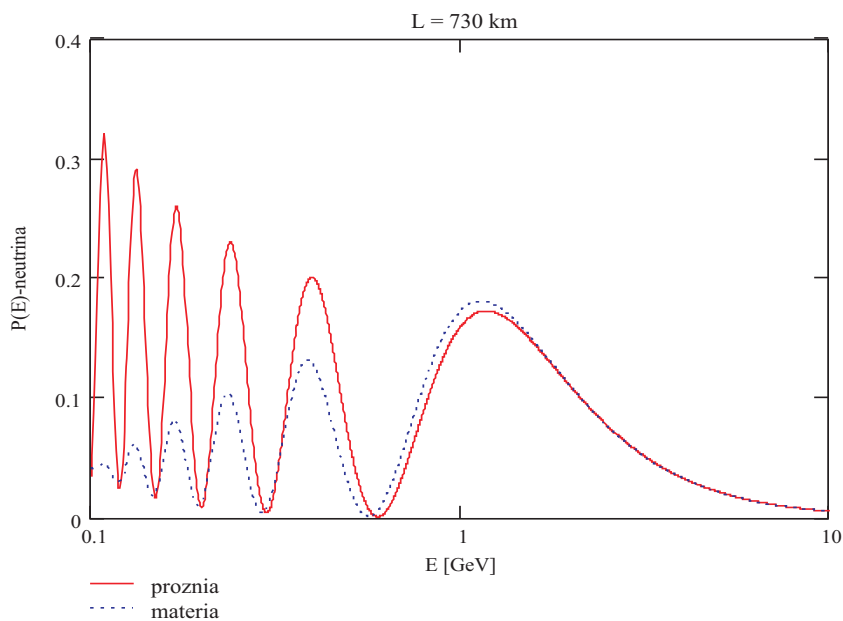
Rysunek 8: Wykres prawdopodobieństwa oscylacji neutrin i antyneutrin ze stanu elektronowego do stanu mionowego $P(E, L=730\text{km})$



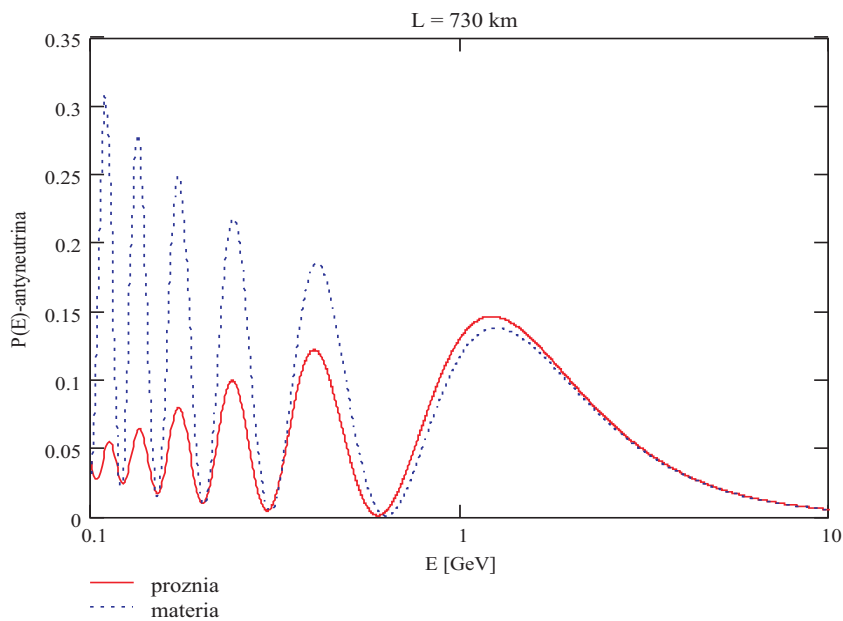
Rysunek 9: Porównanie prawdopodobieństwa oscylacji neutrin $P(L, E=1\text{GeV})$ w próżni (linia ciągła) i w materii (linia przerywana)



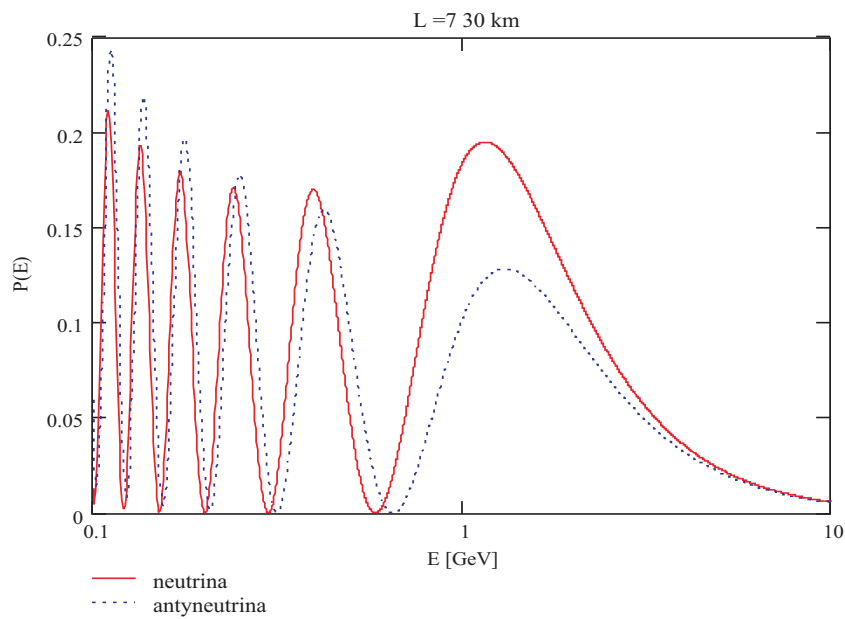
Rysunek 10: Porównanie prawdopodobieństwa oscylacji antyneutrin $P(L, E=1\text{GeV})$ w próżni (linia ciągła) i w materii (linia przerywana)



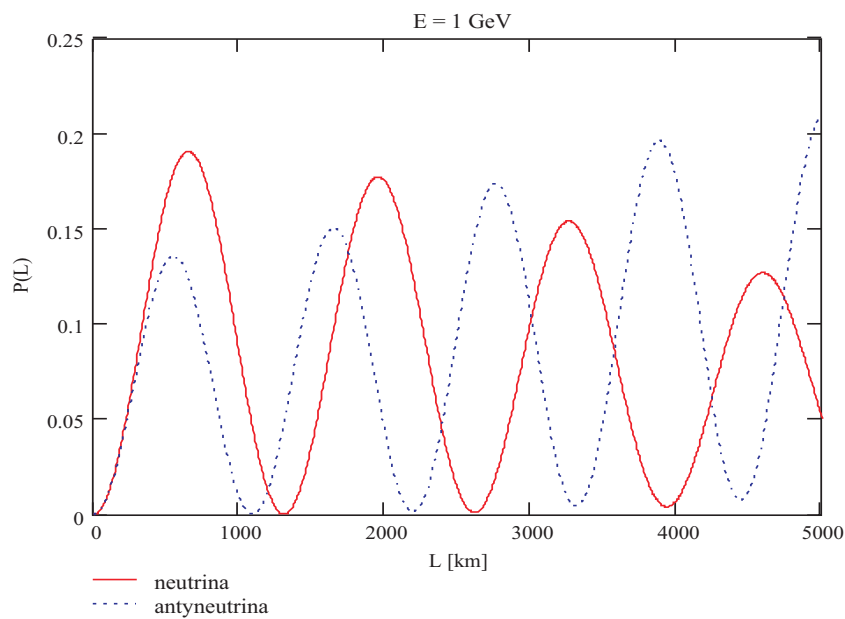
Rysunek 11: Porównanie prawdopodobieństwa oscylacji neutrin $P(E, L=730\text{km})$ w próżni (linia ciągła) i w materii (linia przerywana)



Rysunek 12: Porównanie prawdopodobieństwa oscylacji antyneutrin $P(E, L=730\text{km})$ w próżni (linia ciągła) i w materii (linia przerywana)



Rysunek 13: Prawdopodobieństwo oscylacji neutrin (linia ciągła) i antyneutrin (linia przerywana) w materii przy fazie CP $\delta = 0$



Rysunek 14: Prawdopodobieństwo oscylacji neutrin (linia ciągła) i antyneutrin (linia przerywana) w materii przy fazie CP $\delta = 0$

Na tych rysunkach widać pewną zależność: przy ustalonej energii wraz ze wzrostem odległości wzrasta różnica między oscylacjami neutrin i antyneutrin w próżni i materii, natomiast dla energii istnieje odwrotna tendencja tzn. dla mniejszych energii oscylacje bardziej się różnią.

Na rysunkach (13) i (14) przedstawione są wykresy prawdopodobieństwa oscylacji neutrin i antyneutrin przy fazie łamania CP $\delta = 0$. W przeciwieństwie do przypadku oscylacji w próżni tutaj neutrina i antyneutrina oscylują inaczej nawet przy zerowej fazie łamania CP.

6.2 Sposoby wyznaczania fazy CP

Asymetria oscylacji neutrin i antyneutrin wynikająca z oddziaływania z materią powoduje trudności w wyznaczeniu efektu łamania CP.

W przypadku oscylacji w próżni zdefiniowałem obserwabę (5.58) pokazującą efekt łamania symetrii CP. Jednak w przypadku oscylacji w materii oprócz tej obserwabli można zdefiniować jeszcze dwie inne, które tylko w przypadku próżni są tożsame z DCP[14].

•

$$DP_m(\delta) = P(\nu_a \rightarrow \nu_b, \delta) - P(\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b, \delta) \quad (6.72)$$

Różnica między prawdopodobieństwem oscylacji neutrin i antyneutrin w materii. Nie jest to wyróżnik łamania symetrii CP, ponieważ w przypadku oscylacji w materii nawet przy fazie $\delta = 0$ neutrina oscylują inaczej niż antyneutrina.

•

$$DT_m(\delta) = P(\nu_a \rightarrow \nu_b, \delta) - P(\nu_b \rightarrow \nu_a, \delta) \quad (6.73)$$

Różnica prawdopodobieństwa oscylacji neutrin ze stanu a do stanu b i prawdopodobieństwa z odwróceniem stanów początkowych z końcowymi. Wielkość jest pewniejsza w interpretacji, ponieważ zawiera jedynie część wzoru na prawdopodobieństwo oscylacji z współczynnikiem Jarlskog. Dlatego $DT_m(\delta = 0) = 0$.

•

$$DCP_m(\delta) = DP_m(\delta) - DP_m(\delta = 0) \quad (6.74)$$

Wielkość tą można uważać za prawdziwy efekt łamania symetrii CP w przypadku oscylacji neutrin w materii. Ponieważ $DP_m(\delta = 0)$ należy

traktować jako wielkość różnicy prawdopodobieństw oscylacji neutrin i antyneutrin wywołaną przez oddziaływanie z materią, dlatego odejmując ją od $DP_m(\delta \neq 0)$ dostajemy wielkość, która mierzy efekt łamania symetrii CP w materii.

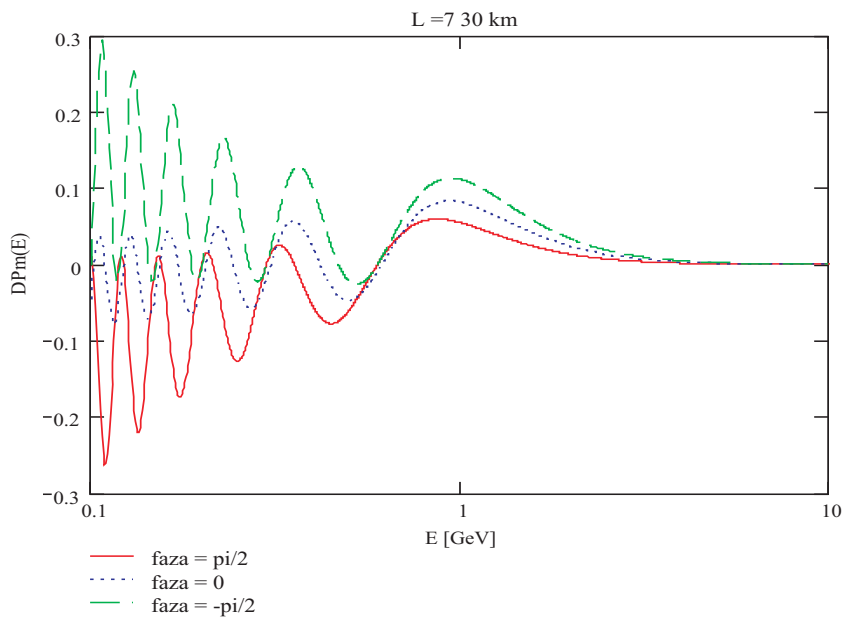
Warto sprawdzić jak powyżej definiowane wielkości (6.72) – (6.74) zachowują się jako funkcje energii i funkcji dla różnych wartości fazy łamania symetrii CP.

Na rysunkach (15) i (16) przedstawiono zachowanie wielkości DP_m jako funkcji energii i odległości. Najważniejszą cechą DP_m jest fakt, że nie znika ona dla zerowej fazy CP. Pierwsze maksimum (energii 1 GeV) znajduje się, w zależności od wartości fazy dla 750-900 km. Dla ustalonej odległości 730 km DP_m posiada maksimum dla energii, w zależności od fazy od 850 MeV do 1 GeV.

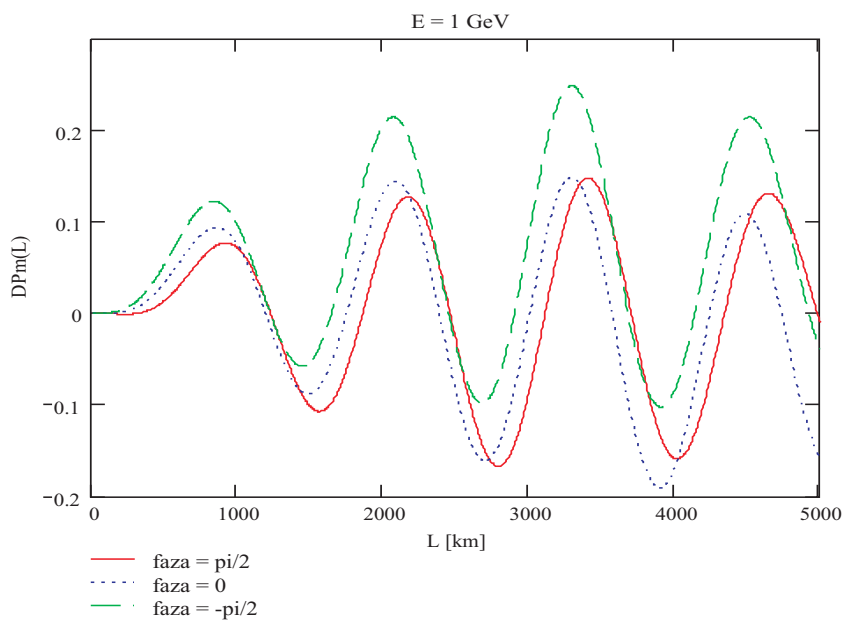
Na rysunkach (17) i (18) natomiast widać zachowanie DT_m . Przede wszystkim można zauważyć, że dla zerowej fazy CP, DT_m znika i jest nieparzystą funkcją fazy łamania CP. Ponadto przy energii neutrin równej 1 GeV ma pierwsze maksimum dla 750 km, a dla odległości 730 km maksimum występuje dla energii 1 GeV. Położenie maksimum nie zależy od wartości fazy łamania CP. Zatem badając doświadczalnie tą wielkość można byłoby wyznaczyć wartość łamania symetrii T w materii, a co za tym idzie wartość fazy w macierzy CKM.

Rysunki (19) i (20) przedstawiają wykresy DCP_m , która jest najciekawszą wielkością ze względu na możliwości zmierzenia efektu łamania symetrii CP. Jak można było oczekiwać dla zerowej fazy DCP_m znika. Natomiast dla fazy $\delta = \pi/2$ DCP_m oscyluje między wartościami dodatnimi i ujemnymi, ale dla $\delta = -\pi/2$ przyjmuje tylko dodatnie wartości. DCP_m posiada maksima dla tych samych wartości L i E co DT_m . Zatem mierząc doświadczalnie wiązkę neutrin i antyneutrin o tej samej energii można wyznaczyć efekt łamania symetrii CP, a następnie korzystając ze związku między współczynnikiem Jarlskog w materii i próżni (6.71) wyznaczyć fazę w macierzy mieszania.

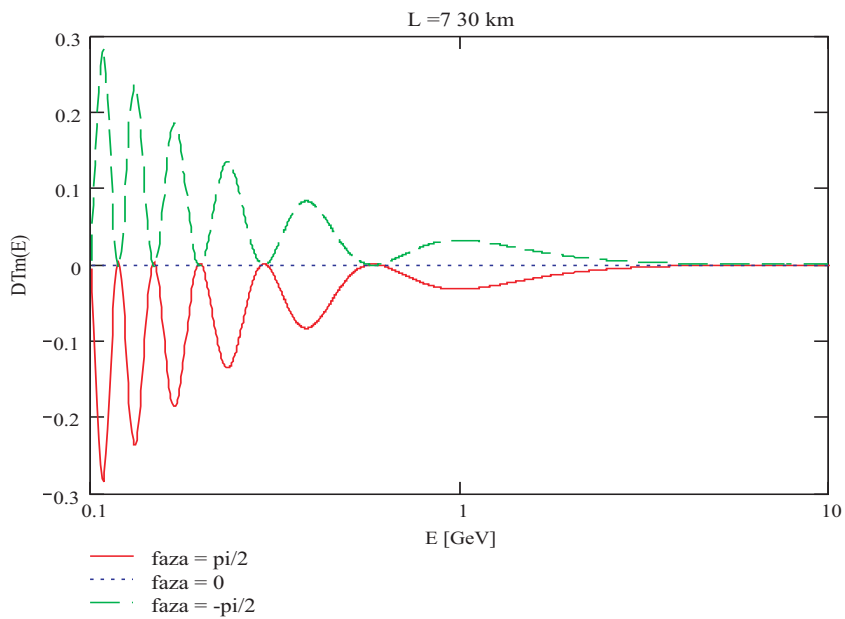
Zatem w materii tylko dwie ze zdefiniowanych obserwabl są dobrymi kandydatami na zmierzenie efekty łamania symetrii CP w lektorze leptonowym: DT_m i DCP_m . Można jeszcze zobaczyć jak te dwie wielkości różnią się od siebie i porównać z rysunkiem (5) przedstawiającym łamanie symetrii CP w próżni. Na rysunkach (21) i (22) widać, że nasze dwie obserwable materialne różnią się nieznacznie od siebie i od obserwabl próżniowej, zwłaszcza dla mniejszych odległości i wyższych energii.



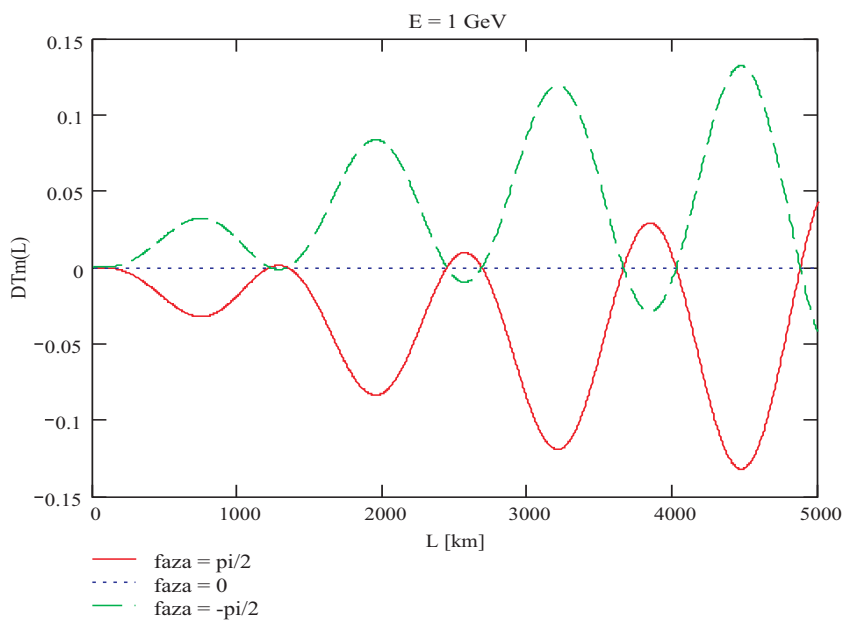
Rysunek 15: Wykres $DP_m(E, L = 730 \text{ km})$ dla trzech wartości fazy CP



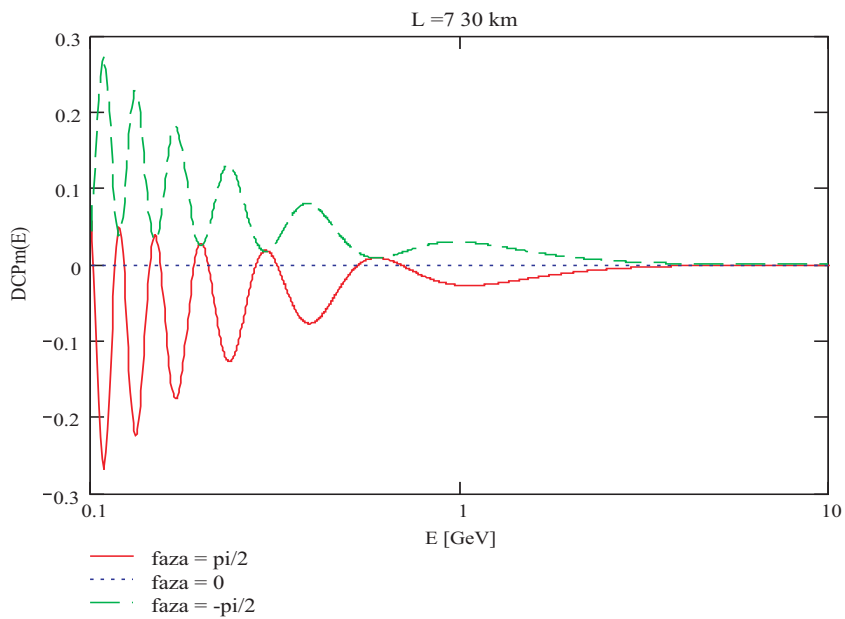
Rysunek 16: Wykres $DP_m(L, E = 1 \text{ GeV})$ dla trzech wartości fazy CP



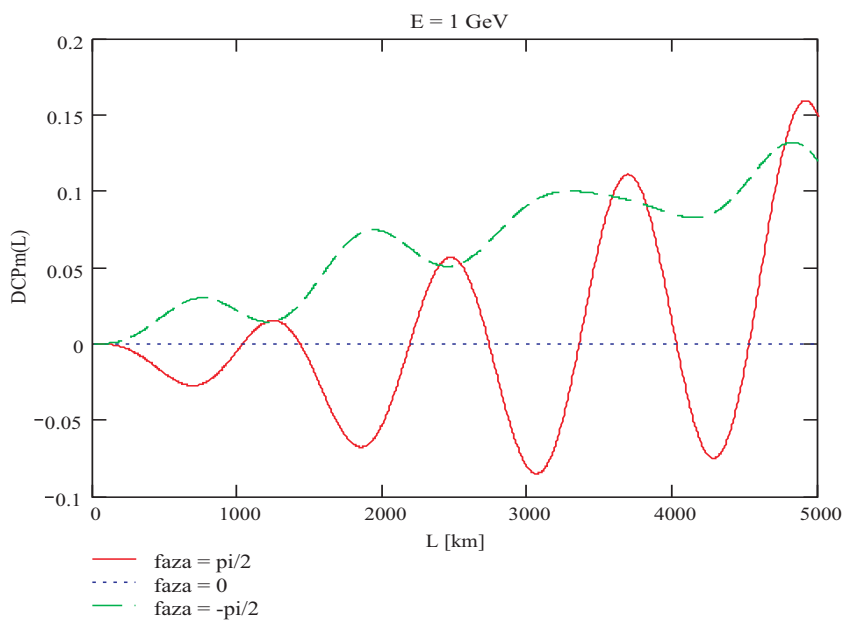
Rysunek 17: Wykres $DT_m(E, L = 730 \text{ km})$ dla trzech wartości fazy CP



Rysunek 18: Wykres $DT_m(L, E = 1 \text{ GeV})$ dla trzech wartości fazy CP



Rysunek 19: Wykres $DCP_m(E, L = 730 \text{ km})$ dla trzech wartości fazy CP

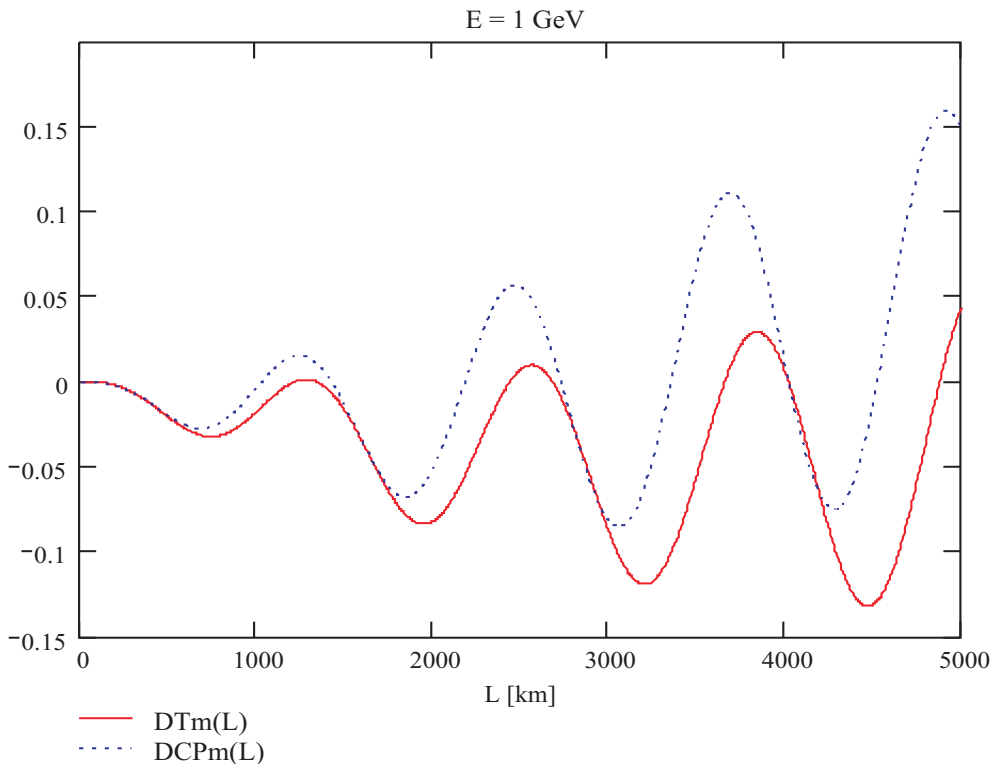


Rysunek 20: Wykres $DCP_m(L, E = 1 \text{ GeV})$ dla trzech wartości fazy CP

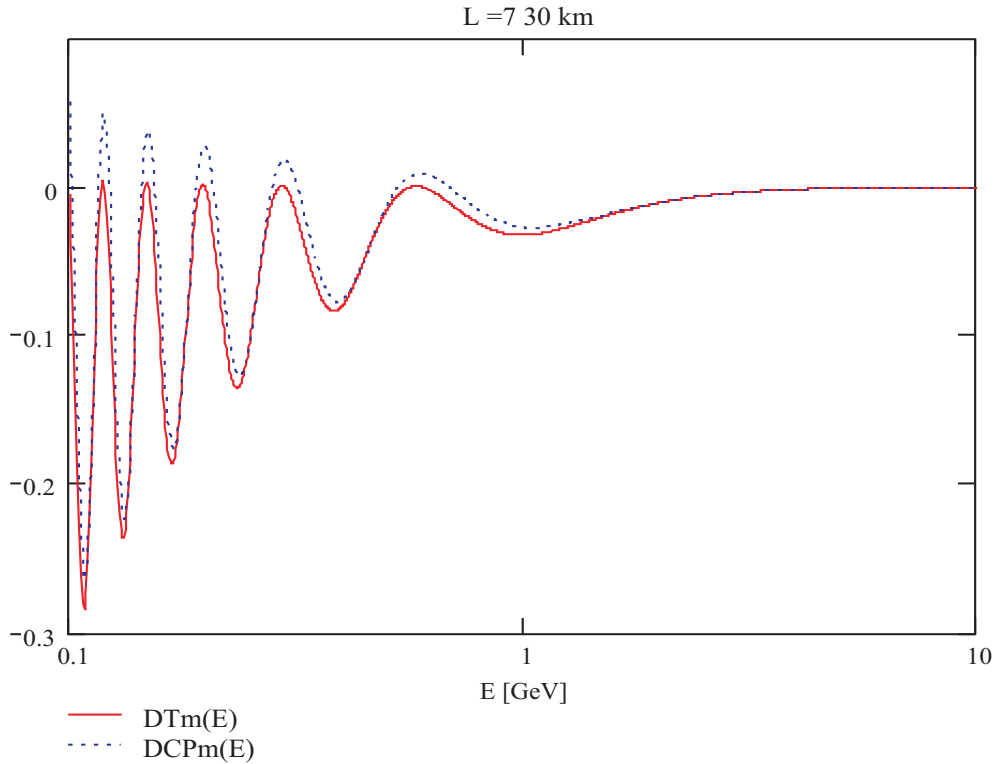
Wydaje się, że wybór obserwabli nie ma znaczenia, zdecydować muszą względy praktyczne.

Zatem te wielkości umożliwią nam zaprojektować doświadczenia dzięki którym jesteśmy w stanie wyznaczyć czy efekt łamania symetrii CP występuje w lektorze leptonowym.

Aby skorzystać z DT_m należy badać dwie wiązki, gdzie zamienione są stany początkowe z końcowymi. Jednak przeprowadzenie takiego doświadczenia jest trudne ponieważ obie wiązki muszą mieć podobny rozkład energii. Natomiast DCP_m jest doświadczalnie korzystniejsza, ponieważ na przykład Fabryki Neutrin będą mogły produkować zarówno wiązkę neutrin jak i antyneutrin o podobnym rozkładzie energii.



Rysunek 21: Wykres $DCP_m(L)$ i $DT_m(L)$ dla $E=1\text{GeV}$



Rysunek 22: Wykres $DCP_m(E)$ i $DT_m(E)$ dla $L=730\text{km}$

7 Wnioski

Podstawowym celem pracy było teoretyczne zbadanie możliwości zmierzenia efektu łamania symetrii CP w sektorze leptonowym. Następnym zadaniem było podanie najlepszego wyboru energii neutrin i odległości źródła neutrin do detektora, które pozwolą wyznaczyć kompletnie nieznaną wartość parametru macierzy mieszania jakim jest faza δ .

Wyznaczenie efektu CP jest możliwe przez porównanie wiązki neutrin i wiązki antyneutrin o takim samym rozkładzie energii. Możliwe jest też wyznaczenie fazy w macierzy mieszania przez pomiar efektu łamania symetrii T. W tym celu potrzebne są dwie wiązki neutrin: elektronowych i mionowych.

Wykonane rysunki pokazują, że dla gęstości materii jaką przyjąłem w pracy efekty materialne mają niewielki wpływ na obserwowane efekty łamania symetrii CP.

Podczas analizy wielkości mierzących efekty CP i T szczególny nacisk położyłem

na wartości parametrów dla istniejących lub planowanych doświadczeń. Wybór energii neutrin i odległości nie jest prostą decyzją. Wysokie energie są preferowane przez fabryki neutrin, ale w wysokich energiach neutrina mają małe prawdopodobieństwo oscylacji i efekt łamania CP jest silnie tłumiony. Wybierając odległość 730 km, która odpowiada odległości z CERN-u do Gran Sasso oraz z Fermilabu do Soudanu, gdzie umiejscowione są doświadczenia neutrinowe pozostaje jeszcze wybór energii. Tutaj należy pogodzić dwie sprawy. Po pierwsze efekt łamania CP jest lepiej widoczny dla niskich energii, a po drugie tylko fabryki neutrin będą w stanie wyprodukować wiązki neutrin o potrzebnej intensywności. Zatem najlepszym wyborem jest energia koło 1 GeV, ponieważ dla niej istnieje wyraźne maksimum.

Po uwzględnieniu wszystkich powyższych argumentów $L = 730\text{km}$ i $E = 1\text{GeV}$ jest najlepszym ustawieniem doświadczenia mierzącego łamanie symetrii CP w oscylacjach neutrin.

A Prawdopodobieństwo oscylacji dla 3 rodzin

$$P(\nu_b \rightarrow \nu_a) = |U_{bj} e^{-iE_j t} U_{aj}^*|^2$$

gdzie macierz mieszania ma teraz ogólną postać:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}$$

Przy obliczaniu prawdopodobieństwo skorzystam z przybliżenia relatywistycznego oraz wprowadzę oznaczenie

$$\Delta_{ij} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}$$

$$\begin{aligned} P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= (U_{bj} e^{-iE_j t} U_{aj}^*) (U_{bj} e^{-iE_j t} U_{aj}^*)^* = (U_{bj} e^{-iE_j t} U_{aj}^*) (U_{bj}^* e^{-iE_j t} U_{aj}) = \\ &= (U_{a1} e^{-iE_1 t} U_{b1}^* + U_{a2} e^{-iE_2 t} U_{b2}^* + U_{a3} e^{-iE_3 t} U_{b3}^*) * \\ &* (U_{a1}^* e^{-iE_1 t} U_{b1} + U_{a2}^* e^{-iE_2 t} U_{b2} + U_{a3}^* e^{-iE_3 t} U_{b3}) = \\ &= U_{a1} e^{-iE_1 t} U_{b1}^* U_{a1}^* e^{-iE_1 t} U_{b1} + U_{a1} e^{-iE_1 t} U_{b1}^* U_{a2}^* e^{-iE_2 t} U_{b2} + \\ &+ U_{a1} e^{-iE_1 t} U_{b1}^* U_{a3}^* e^{-iE_3 t} U_{b3} + U_{a2} e^{-iE_2 t} U_{b2}^* U_{a1}^* e^{-iE_1 t} U_{b1} + \\ &+ U_{a2} e^{-iE_2 t} U_{b2}^* U_{a2}^* e^{-iE_2 t} U_{b2} + U_{a2} e^{-iE_2 t} U_{b2}^* U_{a3}^* e^{-iE_3 t} U_{b3} + \\ &+ U_{a3} e^{-iE_3 t} U_{b3}^* U_{a1}^* e^{-iE_1 t} U_{b1} + U_{a3} e^{-iE_3 t} U_{b3}^* U_{a2}^* e^{-iE_2 t} U_{b2} + \\ &+ U_{a3} e^{-iE_3 t} U_{b3}^* U_{a3}^* e^{-iE_3 t} U_{b3} = \\ &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\ &+ U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2} e^{-it\Delta_{12}} + U_{a1}^* U_{a2} U_{b1} U_{b2}^* e^{it\Delta_{12}} + \\ &+ U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3} e^{-it\Delta_{13}} + U_{a1}^* U_{a3} U_{b1} U_{b3}^* e^{it\Delta_{13}} + \\ &+ U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3} e^{-it\Delta_{23}} + U_{a2}^* U_{a3} U_{b2} U_{b3}^* e^{it\Delta_{23}} = \\ &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\ &+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2} e^{-it\Delta_{12}}] + \\ &+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3} e^{-it\Delta_{13}}] + \\ &+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3} e^{-it\Delta_{23}}] \end{aligned}$$

Korzystając z własności:

$$\operatorname{Re}[AB] = \operatorname{Re}A \operatorname{Re}B - \operatorname{Im}A \operatorname{Im}B$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \operatorname{Re} [e^{-it\Delta_{12}}] - 2 \operatorname{Im} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \operatorname{Im} [e^{-it\Delta_{12}}] + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \operatorname{Re} [e^{-it\Delta_{13}}] - 2 \operatorname{Im} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \operatorname{Im} [e^{-it\Delta_{13}}] + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \operatorname{Re} [e^{-it\Delta_{23}}] - 2 \operatorname{Im} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \operatorname{Im} [e^{-it\Delta_{23}}] = \\
&= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) - 2 \operatorname{Im} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin(t\Delta_{12}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) - 2 \operatorname{Im} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \sin(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) - 2 \operatorname{Im} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \sin(t\Delta_{23}) =
\end{aligned}$$

Korzystając z własności J dostajemy:

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) - 2J_{ab;12} \sin(t\Delta_{12}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) - 2J_{ab;13} \sin(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) - 2J_{ab;23} \sin(t\Delta_{23}) = \\
&= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) - 2J \sin(t\Delta_{12}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + 2J \sin(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) - 2J \sin(t\Delta_{23}) = \\
&= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) + \\
&+ 2J [\sin(t\Delta_{13}) - \sin(t\Delta_{12}) - \sin(t\Delta_{23})] + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) = \\
&= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) + 2J [\sin(t\Delta_{13}) - \sin(t\Delta_{12}) - \sin(t(\Delta_{13} - \Delta_{12}))]
\end{aligned}$$

Teraz korzystając z równości trygonometrycznej:

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

Można zapisać

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2J [\sin(t\Delta_{13}) - \sin(t\Delta_{12}) - \sin(t\Delta_{13}) \cos(t\Delta_{12}) + \sin(t\Delta_{12}) \cos(t\Delta_{13})] + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) = \\
&= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 2J \sin(t\Delta_{13}) [1 - \cos(t\Delta_{12})] =
\end{aligned}$$

Aby doprowadzić do postaci zawartej w pracy H.Minakata, H.Nunokawa *Measuring CP violation by low-energy medium-baseline neutrino experiment* muszę wykorzystać równanie:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

I otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 4J \sin(t\Delta_{13}) \sin^2(t\frac{\Delta_{12}}{2}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) = \\
&= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 4J \sin(t\Delta_{13}) \sin^2(t\frac{\Delta_{12}}{2}) \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) = \\
&= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 4J \sin(t\Delta_{13}) \sin^2(t\frac{\Delta_{12}}{2}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23})
\end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 4J \sin(t\Delta_{13}) \sin^2(t\frac{\Delta_{12}}{2}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23})
\end{aligned}$$

Korzystając z własności macierzy mieszania:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] &= \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 \\
2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] &= \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \\
2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] &= \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2
\end{aligned}$$

Po podstawieniu dostaję

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] &= \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - \\
&- |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) - \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - \\
&- |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 = \\
&= \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + \\
&+ \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2 - 1 + 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 = \\
&= 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] - \delta_{ab} (2 |U_{a1}|^2 - 2 |U_{a3}|^2) + \\
&+ 2 |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2
\end{aligned}$$

Inna relacja:

$$\begin{aligned}
&|U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 = \\
&= \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) - \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 = \\
&= -\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + \\
&+ |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 = \\
&= -2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2
\end{aligned}$$

No i dalej prawdopodobieństwo:

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= -2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 4J \sin(t\Delta_{13}) \sin^2\left(t\frac{\Delta_{12}}{2}\right) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \cos(t\Delta_{12}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) = \\
&= -2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] (1 - \cos(t\Delta_{12})) + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 4J \sin(t\Delta_{13}) \sin^2\left(t\frac{\Delta_{12}}{2}\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos (t \Delta_{13}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos (t \Delta_{23}) - \\
&- 2J \sin (t \Delta_{12}) [1 - \cos (t \Delta_{13})] + 4J \sin (t \Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) = \\
&= \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + 2 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a3}^* U_{b1}^* U_{b3}] \cos (t \Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos (t \Delta_{23}) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) - \\
&- 2J \sin (t \Delta_{12}) [1 - \cos (t \Delta_{13})] + 4J \sin (t \Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Korzystam z zależności podanych wyżej:

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= -4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) - 2J \sin (t \Delta_{12}) [1 - \cos (t \Delta_{13})] + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{13}) + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{23}) + \\
&+ \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + 4J \sin (t \Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) = \\
&= -4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) - 2J \sin (t \Delta_{12}) [1 - \cos (t \Delta_{13})] + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2) \cos (t \Delta_{13}) - \\
&- (|U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{13}) + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{23}) + \\
&+ \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + 4J \sin (t \Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) = \\
&= -4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) - 2J \sin (t \Delta_{12}) [1 - \cos (t \Delta_{13})] + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{13}) + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{23}) + \\
&+ \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 - 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \cos (t \Delta_{13}) + \\
&+ 4J \sin (t \Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) = \\
&= -4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) - 2J \sin (t \Delta_{12}) [1 - \cos (t \Delta_{13})] + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{13}) + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos (t \Delta_{23}) + \\
&+ \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + 2 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 (1 - \cos (t \Delta_{13})) \\
&+ 4J \sin (t \Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) - \\
&- 2J \sin(t\Delta_{12}) [1 - \cos(t\Delta_{13})] + 4J \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos(t\Delta_{23})
\end{aligned}$$

Pierwsza część jest prawie dokładnie taka sama jak w pracy: H.Minakata, H.Nunokawa "Measuring CP violation by low-energy medium-baseline neutrino oscillation experiment". Zapisze powyższe wyrażenie w innej postaci.

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \\
&+ 4J (\sin(t\Delta_{12}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right)) + \\
&+ (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) = \\
&= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \\
&+ 4J (\sin(t\Delta_{12}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right)) + \\
&+ \delta_{ab} (1 + 2 |U_{a1}|^2 + 2 |U_{a3}|^2 - 2) \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ (|U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2) = \\
&= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \\
&+ 4J (\sin(t\Delta_{12}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right)) + \\
&- (\delta_{ab} (1 - 2 |U_{a1}|^2) - |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2) \cos(t\Delta_{13}) - \\
&- (|U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 - |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2) \cos(t\Delta_{13}) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) + \delta_{ab} (1 - 2 |U_{a3}|^2 + 2 |U_{a3}|^2 \cos(t\Delta_{13})) = \\
&= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \\
&+ 4J (\sin(t\Delta_{12}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right)) + \\
&- 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{23}) + \\
&+ \delta_{ab} (1 - 4 |U_{a3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right)) = \\
&= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \\
&+ 4J (\sin(t\Delta_{12}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right)) + \\
&- 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t(\Delta_{13} - \Delta_{12})) + \\
&+ \delta_{ab} (1 - 4 |U_{a3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \\
&+ 4J \left(\sin(t\Delta_{12}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) \right) - \\
&- 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \cos(t\Delta_{13}) + \delta_{ab} \left(1 - 4 |U_{a3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) \right) \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \left(\cos(t\Delta_{13}) \cos(t\Delta_{12}) + \sin(t\Delta_{13}) \sin(t\Delta_{12}) \right) =
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
P(\nu_b \rightarrow \nu_a) &= 4 |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - 4 \operatorname{Re} [U_{a1} U_{a2}^* U_{b1}^* U_{b2}] \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) + \\
&+ 4J \left(\sin(t\Delta_{12}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) - \sin(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{12}}{2} \right) \right) + \\
&+ \delta_{ab} \left(1 - 4 |U_{a3}|^2 \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) \right) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [U_{a2} U_{a3}^* U_{b2}^* U_{b3}] \left(\sin(t\Delta_{13}) \sin(t\Delta_{12}) - 2 \cos(t\Delta_{13}) \sin^2 \left(t \frac{\Delta_{13}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

B Argument funkcji

Należy teraz wyjaśnić jaką postać ma argument funkcji trygonometryczny we wzorze na prawdopodobieństwo.

$$\Delta_{ij} t = \Delta_{ij} L,$$

gdzie L jest drogą jaką przebyła cząstka.

$$\Delta_{ij} L = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L,$$

przy czym

$$\Delta m_{ij}^2 = m_j^2 - m_i^2$$

Należy za pomocą stałych c-prędkość światła w próżni i h-stała Plancka

$$\left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

doprowadzić aby argument był bezwymiarowy.

$$\left[\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \right] = \left[\frac{(kg)^2}{J} m \right]$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(kg)^2}{J} m \right]^{-1} &= \left[\frac{J}{(kg)^2 m} \right] = \left[\frac{J}{(kg)^2 m} \frac{s^4 m^4}{s^4} \right] = \left[\frac{J}{\left(\frac{(kg)^2 m^4}{s^4} \right) s^4} \right] = \left[\frac{J}{J^2} \frac{m^3}{s^4} \right] = \left[\frac{J}{J^2} \frac{m^3}{s^4} \right] = \\
&= \left[\frac{1}{Js} \frac{m^3}{s^3} \right] = \left[\frac{c^3}{\hbar} \right]
\end{aligned}$$

Czyli

$$\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \rightarrow \frac{c^3}{\hbar} \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L$$

Ponieważ masę wyrażamy tutaj w eV, to

$$\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \rightarrow \frac{c^3}{\hbar} \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \rightarrow \frac{1}{2\hbar [eVs] c [m/s]} \frac{\Delta m_{ij}^2 [eV^2]}{E [eV]} L [m] = 2.534 \frac{\Delta m_{ij}^2 [eV^2]}{E [GeV]} L [km]$$

Ponieważ projektując eksperyment można mieć wpływ jedynie na wielkość

$$L/E,$$

dlatego wygodnie będzie obliczyć wartość stałego współczynnika (oczywiście bez masy neutrin, których nie znamy).

C Efektywny Hamiltonian

Wszystkie trzy neutrina ν_e , ν_μ i ν_τ oddziałują ze składnikami materii ziemskiej (tzn. elektronami, protonami i neutronami) przez prąd neutralny (NC). Natomiast neutrina elektronowe dodatkowo oddziałują z elektronami ośrodka przez prąd naładowany (CC). Oddziaływanie przez prąd naładowany przy niskich energiach jest dobrze opisywany przez efektywny Hamiltonian:

$$\begin{aligned} H_{CC} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}] [\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_e] \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e] [\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}], \end{aligned} \quad (3.75)$$

gdzie skorzystano z transformacji Fierza. Aby obliczyć rozkład rozproszenia w przód od energii ν_e w materii ustalamy wszystkie zmienne odpowiadające ν_e i całkujemy po wszystkich zmiennych, które odpowiadają elektronom.

$$H_{eff}(\nu_e) = \langle H_{CC} \rangle_{elektron} \equiv \bar{\psi}_{\nu_e} A \psi_{\nu_e} \quad (3.76)$$

Ponadto mamy

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_e \gamma_0 \psi_e \rangle &= \langle \psi_e^\dagger \gamma_0 \psi_e \rangle = N_e, \\ \langle \bar{\psi}_e \gamma \psi_e \rangle &= \langle \mathbf{v}_e \rangle, \\ \langle \bar{\psi}_e \gamma_0 \gamma_5 \psi_e \rangle &= \left\langle \frac{\sigma_e \mathbf{p}_e}{E_e} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\langle \bar{\psi}_e \gamma \gamma_5 \psi_e \rangle = \langle \sigma_e \rangle,$$

gdzie N_e jest gęstością liczby elektronów. Dla niespolaryzowanego ośrodka tylko pierwsze wyrażenie nie znika i dostajemy

$$(V_e)_{CC} \equiv A = \sqrt{2} G_F N_e \quad (3.77)$$

D Wyznaczenie ogólnej postaci macierzy unitarnych

D.1 Przypadek 2x2

Związek pomiędzy stanami masowymi a stanami zapachowymi jest następujący:

$$|\nu_l\rangle = U_{la} |\nu_a\rangle$$

Stany masowe i zapachowe są oczywiście unormowane, natomiast macierz mieszania jest macierzą unitarną.

$$\begin{aligned} \langle \nu_{l'} | \nu_l \rangle &= \delta_{ll'} \\ \langle \nu_{a'} | \nu_a \rangle &= \delta_{aa'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{l'a'}^* U_{la} \delta_{aa'} &= \delta_{ll'} \\ UU^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ogólne rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad U^+ = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} \\ UU^+ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* + \beta\beta^* & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* & \gamma\gamma^* + \delta\delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* & |\gamma|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zatem mam układ równań:

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* = 0 \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* = 0 \end{cases}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
 U^\dagger U &= \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha^* \alpha + \gamma^* \gamma & \alpha^* \beta + \gamma^* \delta \\ \beta^* \alpha + \delta^* \gamma & \beta^* \beta + \delta^* \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 & \alpha^* \beta + \gamma^* \delta \\ \beta^* \alpha + \delta^* \gamma & |\beta|^2 + |\delta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

I kolejny układ równań:

$$\begin{cases} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \\ |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha^* \beta + \gamma^* \delta = 0 \\ \beta^* \alpha + \delta^* \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \\ |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha^* \beta + \gamma^* \delta = 0 \end{cases}$$

Możliwe jest przedefiniowanie stanów o czynniki fazowe

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_{\mu'}\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_{\mu}\rangle \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\mu} & 0 \\ 0 & e^{i\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{1'}\rangle \\ |\nu_{2'}\rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

W takim przypadku mamy

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_{\mu}\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} |\nu_{e'}\rangle \\ |\nu_{\mu'}\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\mu} & 0 \\ 0 & e^{i\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{1'}\rangle \\ |\nu_{2'}\rangle \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha e^{i\lambda} & \beta e^{i\lambda} \\ \gamma e^{i\kappa} & \delta e^{i\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\mu} & 0 \\ 0 & e^{i\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{1'}\rangle \\ |\nu_{2'}\rangle \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha e^{i\lambda} e^{i\mu} & \beta e^{i\lambda} e^{i\nu} \\ \gamma e^{i\kappa} e^{i\mu} & \delta e^{i\kappa} e^{i\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{1'}\rangle \\ |\nu_{2'}\rangle \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha e^{i(\lambda+\mu)} & \beta e^{i(\lambda+\nu)} \\ \gamma e^{i(\kappa+\mu)} & \delta e^{i(\kappa+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{1'}\rangle \\ |\nu_{2'}\rangle \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Redukujemy fazy na wszystkie sposoby. Niech

$$\alpha e^{i(\lambda+\mu)}$$

i

$$\beta e^{i(\lambda+\nu)}$$

będą rzeczywiste i dodatnie

$$\begin{aligned}\alpha e^{i(\lambda+\mu)} &\equiv \cos\theta \\ \beta e^{i(\lambda+\nu)} &\equiv \sin\theta\end{aligned}$$

a kąt

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\gamma e^{i(\kappa+\mu)} &= \sin\theta e^{i\sigma} \\ \delta e^{i(\kappa+\nu)} &= \cos\theta e^{i\tau}\end{aligned}$$

Zatem mamy

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta e^{i\sigma} & \cos\theta e^{i\tau} \end{pmatrix}$$

Przy czym z otrzymanych wcześniej układów równań

$$\begin{aligned}\cos\theta \sin\theta e^{-i\sigma} + \sin\theta \cos\theta e^{-i\tau} &= 0 \\ \cos\theta \sin\theta + \sin\theta e^{-i\sigma} \cos\theta e^{i\tau} &= 0\end{aligned}$$

Zatem musi zachodzić

$$\begin{aligned}e^{i\tau} e^{-i\sigma} &= -1 \\ U &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta e^{i\sigma} e^{-i\tau} e^{i\tau} & \cos\theta e^{i\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta e^{i\tau} & \cos\theta e^{i\tau} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

W powyższym wyrażeniu fazę

$$e^{i\tau}$$

można wyrzucić. Dotychczas dostaliśmy

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

,

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$$

Dalsza redukcja

$$\begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_{1'}\rangle \\ |\nu_{2'}\rangle \end{pmatrix}$$

$$U_{1a} \rightarrow U_{1b} \Omega_{ba}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) & \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{pmatrix}$$

Zatem przez zamianę numeracji stanów masowych można uzyskać

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$$

Ostatecznie najogólniejsza postać macierzy mieszania 2x2 to:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}).$$

D.2 Własności macierzy unitarnych

Macierz mieszania jest macierzą unitarną t.j.

$$UU^+ = U^+U = 1$$

Korzystając z powyższej definicji wyprowadzić można różne przyteczne formuły.

$$U_{aj}U_{bj}^* = \delta_{ab}$$

$$|U_{a1}U_{b1}^* + U_{a2}U_{b2}^*|^2 = |\delta_{ab} - U_{a3}U_{b3}^*|^2$$

$$\begin{aligned} L &= (U_{a1}U_{b1}^* + U_{a2}U_{b2}^*)(U_{a1}^*U_{b1} + U_{a2}^*U_{b2}) \\ &= U_{a1}U_{b1}^*U_{a1}^*U_{b1} + U_{a2}U_{b2}^*U_{a2}^*U_{b2} + U_{a1}U_{b1}^*U_{a2}^*U_{b2} + U_{a2}U_{b2}^*U_{a1}^*U_{b1} \\ &= |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + 2\text{Re}[U_{a1}U_{b1}^*U_{a2}^*U_{b2}] \\ P &= (\delta_{ab} - U_{a3}U_{b3}^*)(\delta_{ab} - U_{a3}^*U_{b3}) \\ &= \delta_{ab}\delta_{ab} - \delta_{ab}U_{a3}^*U_{b3} - \delta_{ab}U_{a3}U_{b3}^* + U_{a3}U_{a3}^*U_{b3}^*U_{b3} = \\ &= \delta_{ab}(1 - |U_{a3}|^2 - |U_{a3}|^2) + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \\ &= \delta_{ab}(1 - 2|U_{a3}|^2) + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 \end{aligned}$$

Zatem równanie ma postać:

$$|U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + 2\text{Re}[U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2}] = \delta_{ab}(1 - 2|U_{a3}|^2) + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2$$

Przeprowadzając te same obliczenia otrzymujemy równania:

$$|U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + 2\text{Re}[U_{a1}U_{a3}^*U_{b1}^*U_{b3}] = \delta_{ab}(1 - 2|U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2$$

$$|U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + 2\text{Re}[U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] = \delta_{ab}(1 - 2|U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2 |U_{b1}|^2$$

Przepiszę to w formie pomocnej w dalszych obliczeniach:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2}] &= \delta_{ab}(1 - 2|U_{a3}|^2) + |U_{a3}|^2|U_{b3}|^2 - |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2|U_{b2}|^2 \\ 2\operatorname{Re}[U_{a1}U_{a3}^*U_{b1}^*U_{b3}] &= \delta_{ab}(1 - 2|U_{a2}|^2) + |U_{a2}|^2|U_{b2}|^2 - |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 - |U_{a3}|^2|U_{b3}|^2 \\ 2\operatorname{Re}[U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] &= \delta_{ab}(1 - 2|U_{a1}|^2) + |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 - |U_{a2}|^2|U_{b2}|^2 - |U_{a3}|^2|U_{b3}|^2 \end{aligned}$$

Teraz nadal korzystając z własności macierzy unitarnej obliczę inne zależności:

a)

$$\begin{aligned} U_{a1}U_{b1}^* + U_{a2}U_{b2}^* &= \delta_{ab} - U_{a3}U_{b3}^* \\ U_{a1}^*U_{b1} + U_{a3}^*U_{b3} &= \delta_{ab} - U_{a2}^*U_{b2} \end{aligned}$$

mnożymy stronami powyższe równania

$$\begin{aligned} (U_{a1}U_{b1}^* + U_{a2}U_{b2}^*)(U_{a1}^*U_{b1} + U_{a3}^*U_{b3}) &= (\delta_{ab} - U_{a3}U_{b3}^*)(\delta_{ab} - U_{a2}^*U_{b2}) \\ L = (U_{a1}U_{b1}^* + U_{a2}U_{b2}^*)(U_{a1}^*U_{b1} + U_{a3}^*U_{b3}) & \\ = U_{a1}U_{b1}^*U_{a1}^*U_{b1} + U_{a1}U_{b1}^*U_{a3}^*U_{b3} + U_{a2}U_{b2}^*U_{a1}^*U_{b1} + U_{a2}U_{b2}^*U_{a3}^*U_{b3} & \\ = |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 + U_{a1}U_{a3}^*U_{b1}^*U_{b3} + U_{a1}^*U_{a2}U_{b1}U_{b2}^* + U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3} = & \\ P = (\delta_{ab} - U_{a3}U_{b3}^*)(\delta_{ab} - U_{a2}^*U_{b2}) & \\ = \delta_{ab}\delta_{ab} - \delta_{ab}U_{a2}^*U_{b2} - \delta_{ab}U_{a3}U_{b3}^* + U_{a2}^*U_{a3}U_{b2}U_{b3}^* & \\ = \delta_{ac}(1 - |U_{a2}|^2 - |U_{a3}|^2) + U_{a2}^*U_{a3}U_{b2}U_{b3}^* & \end{aligned}$$

Porównajmy strony:

$$\begin{aligned} |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 + U_{a1}U_{a3}^*U_{b1}^*U_{b3} + U_{a1}^*U_{a2}U_{b1}U_{b2}^* + U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3} & \\ = \delta_{ab}(1 - |U_{a2}|^2 - |U_{a3}|^2) + U_{a2}^*U_{a3}U_{b2}U_{b3}^* & \end{aligned}$$

Równanie to można przepisać:

$$\begin{aligned} |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 + \delta_{ab}(|U_{a2}|^2 + |U_{a3}|^2) + U_{a1}U_{a3}^*U_{b1}^*U_{b3} + U_{a1}^*U_{a2}U_{b1}U_{b2}^* & \\ = \delta_{ab} + U_{a2}^*U_{a3}U_{b2}U_{b3}^* - U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3} & \\ |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 + |U_{a2}|^2 + |U_{a3}|^2 + U_{a1}U_{a3}^*U_{b1}^*U_{b3} + U_{a1}^*U_{a2}U_{b1}U_{b2}^* = & \\ 1 - 2i\operatorname{Im}[U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] & \end{aligned}$$

Porównam teraz części rzeczywiste i urojone obu stron równania

$$\begin{cases} |U_{a1}|^2|U_{b1}|^2 + \delta_{ab}(|U_{a2}|^2 + |U_{a3}|^2) + \operatorname{Re}[U_{a1}U_{a3}^*U_{b1}^*U_{b3} + U_{a1}^*U_{a2}U_{b1}U_{b2}^*] = \delta_{ab} \\ \operatorname{Im}[U_{a1}^*U_{a3}U_{b1}U_{b3}^* + U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2}] = 2\operatorname{Im}[U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] \end{cases}$$

Z analogicznych rozważań dla równań wyjściowych:

b)

$$\begin{aligned} U_{a2}U_{b2}^* + U_{a3}U_{b3}^* &= \delta_{ab} - U_{a1}U_{b1}^* \\ U_{a1}^*U_{b1} + U_{a3}^*U_{b3} &= \delta_{ab} - U_{a2}^*U_{b2} \\ \Downarrow\Downarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |U_{a3}|^2 |U_{b3}|^2 + \delta_{ab} (|U_{a1}|^2 + |U_{a2}|^2) + \text{Re} [U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2} + U_{a1}^*U_{a3}U_{b1}U_{b3}^*] = \delta_{ab} \\ \text{Im} [U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3} + U_{a1}^*U_{a3}U_{b1}U_{b3}^*] = 2\text{Im} [U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2}] \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} U_{a1}U_{b1}^* + U_{a2}U_{b2}^* &= \delta_{ab} - U_{a3}U_{b3}^* \\ U_{a2}^*U_{b2} + U_{a3}^*U_{b3} &= \delta_{ab} - U_{a1}^*U_{b1} \\ \Downarrow\Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |U_{a2}|^2 |U_{b2}|^2 + \delta_{ab} (|U_{a1}|^2 + |U_{a3}|^2) + \text{Re} [U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2} + U_{a2}^*U_{a3}U_{b2}U_{b3}^*] = \delta_{ab} \\ \text{Im} [U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2} + U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] = 2\text{Im} [U_{a3}U_{a1}^*U_{b3}^*U_{b1}] \end{cases}$$

Porówna części urojone:

$$\begin{cases} \text{Im} [U_{a1}^*U_{a3}U_{b1}U_{b3}^* + U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2}] = 2\text{Im} [U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] \\ \text{Im} [U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3} + U_{a1}^*U_{a3}U_{b1}U_{b3}^*] = 2\text{Im} [U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2}] \\ \text{Im} [U_{a1}U_{a2}^*U_{b1}^*U_{b2} + U_{a2}U_{a3}^*U_{b2}^*U_{b3}] = 2\text{Im} [U_{a3}U_{a1}^*U_{b3}^*U_{b1}] \end{cases}$$

Zdefiniujemy

$$J_{ab;ij} \equiv \text{Im} [U_{ai}U_{aj}^*U_{bj}^*U_{bi}]$$

I przepisać można:

$$\begin{aligned} 2J_{ab;23} &= J_{ab;31} + J_{ab;12} \Rightarrow J_{ab;31} = 2J_{ab;23} - J_{ab;12} \\ 2J_{ab;12} &= J_{ab;23} + J_{ab;31} \Rightarrow J_{ab;31} = 2J_{ab;12} - J_{ab;23} \quad i \quad J_{ab;23} = 2J_{ab;12} - J_{ab;31} \\ 2J_{ab;31} &= J_{ab;12} + J_{ab;23} \Rightarrow J_{ab;23} = 2J_{ab;31} - J_{ab;12} \end{aligned}$$

Porównując otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2J_{ab;23} - J_{ab;12} &= 2J_{ab;12} - J_{ab;23} \\ 2J_{ab;12} - J_{ab;31} &= 2J_{ab;31} - J_{ab;12} \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} J_{ab;23} &= J_{ab;12} \\ J_{ab;12} &= J_{ab;31} \end{aligned}$$

Z definicji też wynika, że

$$J_{ab;ij} = J_{ab;ji}$$

Można poszukać własności wielkości J ze względu na indeksy masowe.

$$U^+U = 1$$

czyli

$$U_{ai}^*U_{aj} = \delta_{ij}$$

$$\begin{cases} U_{1i}^* U_{1j} + U_{2i}^* U_{2j} = \delta_{ij} - U_{3i}^* U_{3j} \\ U_{2i} U_{2j}^* + U_{3i} U_{3j}^* = \delta_{ij} - U_{1i} U_{1j}^* \end{cases}$$

$$P = \delta_{ij} (1 - |U_{3i}|^2 - |U_{2i}|^2) + U_{1i} U_{1j}^* U_{3i}^* U_{3j}$$

$$L = |U_{2i}|^2 |U_{2j}|^2 + U_{1i}^* U_{1j} U_{2i} U_{2j}^* + U_{1i}^* U_{1j} U_{3i} U_{3j}^* + U_{2i}^* U_{2j} U_{3i} U_{3j}^*$$

i mamy:

$$\begin{cases} 2\text{Im} [U_{1i} U_{1j}^* U_{3i}^* U_{3j}] = \text{Im} [U_{1i}^* U_{1j} U_{2i} U_{2j}^* + U_{2i}^* U_{2j} U_{3i} U_{3j}^*] \\ 2J_{13;ij} = J_{21;ij} + J_{32;ij} \end{cases}$$

i analogicznie

$$\begin{cases} U_{1i}^* U_{1j} + U_{2i}^* U_{2j} = \delta_{ij} - U_{3i}^* U_{3j} \\ U_{1i} U_{1j}^* + U_{3i} U_{3j}^* = \delta_{ij} - U_{2i} U_{2j}^* \end{cases}$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2\text{Im} [U_{2i} U_{2j}^* U_{3i}^* U_{3j}] = \text{Im} [U_{1i}^* U_{1j} U_{3i} U_{3j}^* + [U_{1i} U_{1j}^* U_{2i}^* U_{2j}]] \\ 2J_{23;ij} = J_{31;ij} + J_{12;ij} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{1i}^* U_{1j} + U_{3i}^* U_{3j} = \delta_{ij} - U_{2i}^* U_{2j} \\ U_{2i} U_{2j}^* + U_{3i} U_{3j}^* = \delta_{ij} - U_{1i} U_{1j}^* \end{cases}$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2\text{Im} [U_{1i} U_{1j}^* U_{2i}^* U_{2j}] = \text{Im} [U_{1i}^* U_{1j} U_{3i} U_{3j}^* + U_{2i} U_{2j}^* U_{3i} U_{3j}^*] \\ 2J_{12;ij} = J_{31;ij} + J_{23;ij} \end{cases}$$

Korzystając z antysymetryczności J można zapisać układ równań

$$\begin{cases} 2J_{31;ij} = J_{12;ij} + J_{23;ij} \\ 2J_{23;ij} = J_{31;ij} + J_{12;ij} \\ 2J_{12;ij} = J_{31;ij} + J_{23;ij} \end{cases}$$

dzięki, któremu dostajemy

$$J_{12;ij} = J_{23;ij} = J_{31;ij}$$

Bibliografia

- [1] Q.R. Ahmad i in., <http://www.sno.phy.queensu.ca/sno/firstresults/>, nucl-ex/0106015
- [2] Steven Geer *Neutrino Factories: Physics*, hep-ph/0008155
- [3] A. Cervera i in. *Golden measurements at neutrino factory*, hep-ph/0002108
- [4] Steven Weinberg *TEORIA PÓL KWANTOWYCH*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999
- [5] Y. Fukuda i in., Phys.Rev.Lett. **86**, 5651 (2001)
- [6] M. Apollonio i in., Phys.Lett. B 420, 397 (1998)
- [7] J.N. Bahcall, <http://www.sns.ias.edu/jnb/>
- [8] S.P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov, Nuovo Cimento C **9**, 17 (1986)
- [9] L. Wolfenstein, Phys.Rev. D, **17**, 2369 (1978)
- [10] J.W.F. Valle *Status of Neutrino Oscillations*, astro-ph/0104085.
- [11] Zhi-zhong Xing *Neutrino Mixing and CP Violation in Matter*, hep-ph/0007135.
- [12] T. Ohlsson, H. Snellman *Three flavor neutrino oscillations in matter*, hep-ph/9910546
- [13] C. Jarlskog, Phys.Rev.Lett. **55**, 1039 (1985)
- [14] A. Rubbia *Neutrino Factories: Detector Concepts for studies of CP and T violation effects in neutrino oscillation*, hep-ph/0106088
- [15] B. Kayser, F. Gibrat-Debu i F. Perrier *The Physics of Massive Neutrinos*, World Scientific, Singapore, 1989
- [16] E.K. Akhmedov *NEWS ABOUT ν 's*, hep-ph/0011353
- [17] E.K. Akhmedov *Neutrino physics*, hep-ph/0001264
- [18] S.M. Bilenky *Neutrinos*, physics/0103091

- [19] H. Minakata, H. Nunokawa *Measuring CP violation by low-energy medium-baseline neutrino oscillation experiment*, hep-ph/0009091
- [20] P. Lipari *CP violation effects and high energy neutrinos*, hep-ph/0102046
- [21] L.B. Okun *Leptony i Kwarki*, Moskwa, 1981
- [22] L.H. Ryder *Elementary Particles and Symmetries*, Gordon and Breach, New York, 1975